T H È S E

présentée

A L A F A C U L T É D E S S C I E N C E S

D E L ' U N I V E R S I T É D E P A R I S

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université

(mention Sciences)

par

Ivan SELIN

---

lère Thèse : ESTIMATION ET DÉTECTION SÉQUENTIELLES DE SIGNAUX DANS DU BRUIT LAPLACIEN.

Soutenue le 18 Juin 1962 devant la Commission d'Examen

MM. Fortet : Président

Ville, Neveu } Examinateurs

AVANT-PROPOS

Dans cette thèse on discute la détection séquentielle de signaux dans du bruit laplacien coloré stationnaire. On considère deux sortes de signaux: des signaux connus exactement, et des signaux connus à l'exception d'un nombre fini de paramètres. Les estimations sont accomplies par la méthode du maximum de vraisemblance.

La thèse est divisée en trois parties. Après un résumé bibliographique d'une grande partie de la littérature concernant la théorie statistique de décision, au chapitre 2 on obtient des résultats mathématiques à propos du développement Karhunen-Loève (K-L) et la sommation de certaines séries de coefficients K-L. Au chapitre 3, on discute dans ses grandes lignes le problème de détection, et on obtient les fonctions statistiques de décision avec les fonctions correspondantes de répartition. Dans ce chapitre est exposé le point de vue principal de la thèse: considération du rapport de vraisemblance comme processus stochastique, et sont développées ses caractéristiques statistiques. En particulier, le rapport de vraisemblance d'un signal connu dans du bruit laplacien coloré est un processus de Markoff.

Au chapitre 4, on considère l'existence et le plan des tests optimaux dans un certain nombre de cas: temps discret, temps permanent, bruit blanc, bruit coloré. Après avoir considéré deux sujets assez spéciaux (la continuité et la régularité de la fonction statistique de décision) on présente un exemple détaillé dont les calculs sont très longs mais qui est assez important quand-même. Le dernier chapitre comporte des conclusions mathématiques, avec leur portée pour les télécommunications, et des questions additionelles purement mathématiques.

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Le langage est celui de la théorie de l'information et des télécommunications. Le processus stochastique est appellé "bruit," tandis que l'espérance de ce processus est un "signal." De même, les transformations linéaires des processus stochastiques sont des filtres, et le paramètre de la densité spectrale (de puissance) est la fréquence. On dit qu'un bruit laplacien est coloré s'il n'est pas blanc.

J'ai rédigé cette thèse à l'Université de Paris avec l'aide d'une Bourse Fulbright.

Je tiens à exprimer mes remerciements à MM. Irving Reed et Worthie Doyle de la RAND Corporation pour leur aide constante et leurs critiques, et surtout à M. Robert Fortet, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, qui a bien voulu diriger mon travail et encourager mes efforts pendant mon séjour en France.

Jury proposé

MM FORTET
VILLE
NEVEU

RÉSUMÉ DE LA THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée par M. Ivan SELIN

Docteur en Philosophie Naturelle

Thèse préparée à la Chaire de Calcul des Probabilités

et Physique Mathématique
de l'Université de Paris

"ESTIMATION ET DÉTECTION SÉQUENTIELLES DE SIGNAUX DANS DU BRUIT LAPLACIEN"

Dans cette thèse on discute la détection séquentielle de signaux dans du bruit laplacien coloré stationnaire. On considère deux sortes de signaux: des signaux connus exactement, et des signaux connus à l'exception d'un nombre fini de paramètres. Les estimations sont accomplies par la méthode du maximum de vraisemblance.

La thèse est divisée en trois parties. Après un résumé bibliographique d'une grande partie de la littérature concernant la théorie statistique de décision, on présente les propriétés bien-connues du développement Karhunen-Loève. Au chapitre 2 on considère la continuité par rapport à l'intervalle de définition, d'une part des valeurs propres, d'autre part des fonctions propres, qui figurent dans le développement K-L. La preuve est restreinte au cas d'un processus réel, mais l'extension au cas complexe est directe. On développe en suite l'artifice le plus commode pour la suite - une

technique pour transformer d'importantes sommes infinies de coefficients (K-L) en intégrales définies finies. On se sert des noyaux de Dirac, mais seulement après la légitimisation de leur emploi. Puis on démontre la symétrie des fonctions propres. Cette propriété est utile au calcul des fonctions et à la définition de l'argument de la fonction.

Au chapitre 3 sont exposés les problèmes d'estimation et détection. On décrit le test séquentiel du rapport de vraisemblance, et on considère ce rapport comme processus stochastique. Des propriétés importantes en résultent. Pour l'estimation à vraisemblance maximum, le rapport de vraisemblance est laplacien - on en trouve la covariance non-stationnaire, et on démontre qu'il est processus de Markoff. Le cas discret et le cas continu sont traités séparément, mais par des méthodes semblables.

L'optimalité du test séquentiel, constatée au chapitre 3, est démontrée au chapitre 4. On considère les quatre cas - un bruit blanc ou coloré, en temps discret ou permanent. Ce sont des extensions du travail de WALD.* En particulier, dans le cas permanent on a une application intéressante de la condition Paley-Wiener: si le processus remplit cette condition, le test est optimum. Sinon, le processus est prévisible analytiquement.

Les fonction et valeurs propres ayant été montrées continues au chapitre 2, la continuité du rapport de vraisemblance au cas d'un spectre rationnel se démontre au chapitre 5. Même le maximum du rapport est continu, et sont présentées les conditions pour que les estimées soient continues. On suppose le spectre rationnel, mais les méthodes sont valables pour tout processus séparable régulier.

---

*Sequential Analysis, J. Wiley and Sons, N.Y., 1947.

Les cas pathologiques possibles, où la détection est singulière, sont présentés au chapitre 6. On donne des conditions suffisantes pour la régularité de détection. On a trois résultats intéressants: 1°) une nouvelle représentation intégrale d'une somme infinie qui remplace dans la théorie de détection électronique le rapport energétique généralisé de signal-à-bruit; 2°) une transformation rendant orthogonaux les coefficients carrés; 3°) une démonstration plus simple d'un théorème de Kelly, Reed et Root* donnant une borne et une valeur asymptotique à cette somme citée.

On donne un exemple au chapitre 7. C'est un traitement détaillé du cas d'un signal connu dans un bruit blanc continu. On obtient d'abord la loi décrivant les probabilités de l'époque de premier passage du rapport de vraisemblance au delà de deux seuils constants. Puis on précise un bruit laplacien de Markoff, et deux signaux spéciaux: une constante et une consinusoïde. Enfin, on prend l'intervalle de corrélation du bruit très petit, d'ou résulte un très bon modele de bruit blanc.

Des conclusions et extensions possibles sont exposées au chapitre 8.

---

*J SIAM Vol. 8, Nos. 2 et 3, 1960.

Chapitre 1

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est de traiter l'estimation (par la méthode du maximum de vraisemblance) et la détection de signaux certains dans du bruit laplacien. L'instrument principal analytique est le développement d'un processus stochastique par les fonctions propres de la covariance (dit le développement de Karhunen-Loève).[1,2] Dans la première partie de la thèse, nous étudions les propriétés des fonctions propres lorsque l'intervalle s'étend. Ces propriétés figurent dans l'étude des tests séquentiels. Dans la deuxième partie nous considérons le cas de temps discret aussi bien que le cas permanent. Le cas de bruit blanc est analysé en détail.

1.1 Résumé Bibliographique

La détection et l'estimation séquentielles sont fondées sur la théorie de l'inférence statistique. La première application du développement K-L aux problèmes de la statistique est due à Grenander.[3] Kelly, Reed, et Root[4] emploient des méthodes semblables dans un traitement étendu de la détection à intervalle d'observation fixé. Slepian[5] utilise ces méthodes pour discuter les estimateurs à vraisemblance maximum de signaux dans du bruit blanc. La théorie statistique de la décision est donnée dans sa forme générale par Wald[6] et elle est appliquée aux problèmes électroniques par Van Meter et Middleton.[7] Ces derniers traduisent les critères de risque de Wald en termes physiques, et trouvent des fonctions convenables de risque. De plus, ils réussissent à décrire des estimateurs à vraisemblance maximum et des détecteurs dans le cas de bruit additif et surtout de petit signal.

Certains auteurs ont pris comme base l'échantillonage d'après Shannon.[8] Woodward et Davies [9] discutent des estimateurs de distance et de vitesse, mais ils n'accordent pas le droit de décision à leur dispositif. Ils considèrent un signal fort dans du bruit blanc. Petersen et Birdsall[10] discutent les probabilités d'erreur pour des signaux spéciaux dans du bruit blanc additif, et justifient l'application du rapport de vraisemblance au radar. Bussgang et Middleton[11] et l'auteur[12] considèrent l'application de l'analyse séquentielle de Wald[13] aux problèmes de la détection électronique (sans estimation) au moyen de la méthode de Shannon.

Swerling[14] a appliqué une méthode de Barankin[15] à l'estimation, à variance localement minimum, de paramètres d'un signal dans du bruit laplacien. (Il considère la théorie d'un bruit plus général, mais dans tous les cas qu'il traite en détail il s'agit de bruit blanc.) Nous étendons son travail en montrant que les estimées sont continues si elles se composent séquentiellement. Swerling considère aussi des paradoxes de la transmission d'information[16] et il montre que les conditions de régularité sont analogues à celles de Grenander[3], et de Kelly, Reed, et Root.[4]

1.2 Base Mathématique

Cette thèse constitue une extension des méthodes de Grenander et des analyses de Kelly, Reed, et Root dans le cas séquentiel.

Il s'agit toujours d'un processus réel possédant une fonction symétrique de covariance. Le développement K-L est l'instrument analytique qui nous permet d'exprimer le rapport de vraisemblance en fonction explicite de la courbe continue des données observées. Il ne faut pas, en général, que le récepteur compose les coefficients du développement.

Nous nous bornons aux tests à vraisemblance maximum. Dans un tel test on compose la vraisemblance en fonction des paramètres inconnus sous l'hypothèse que le signal est présent, et on choisit les valeurs des paramètres qui rendent maximum cette fonction. Le même procédé est utilisé sous l'hypothèse d'absence de signal (s'il s'agit de paramètres du bruit). Puis on prend le rapport des maxima de vraisemblance, et on le compare à un seuil supérieur et un inférieur jusqu'à ce que l'un ou l'autre soit dépassé. Nous considérons ce test en détail au Chapitre 3; signalons ici deux propriétés souhaitables d'un test séquentiel permanent: 1) Le rapport de vraisemblance doit être une fonction continue de la durée d'observation. 2) Les estimées mêmes devraient être des fonctions continues de cette durée.

1.2.1 Résumé des Propriétés du Développement K-L[1]

Un processus n(t) continu en moyenne quadratique avec covariance $\psi(t,u)$ continue peut s'exprimer dans l'intervalle $(0,\tau)$* sous la forme

$$n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i(\tau)\phi_i(t,\tau)\sqrt{\lambda_i(\tau)}, \qquad (1)$$

où la série converge en moyenne arithmétique pour toute époque t dans l'intervalle. Les $\phi_i(t,\tau)$ et les $\lambda_i(\tau)$ sont les fonctions et les valeurs propres normalisées, respectivement, de l'équation intégrale

$$\int_0^{\tau} \psi(t,u)\,\phi(t,\tau)dt = \phi(u,\tau)\lambda(\tau) \qquad (2)$$

*Cette représentation n'est valable que si l'intervalle est fini. Pourtant, au cas d'un intervalle infini, on peut exprimer n(t) en fonction d'une intégrale Fourier à spectre à accroissements orthogonaux (v. [13], Nr. 24).

et

$$n_i(\tau) = \int_0^\tau n(t)\, \phi_i(t,\tau)dt \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}}. \qquad (3)$$

Nous avons écrit les termes en fonctions explicites de la longueur de l'intervalle. Ce développement possède des propriétés importantes:

$$E\, n_i(\tau)\, n_j(\tau) = \delta_{ij} \qquad \left(\text{Kronecker } \delta\text{-fonction, } = \begin{matrix} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{matrix}\right)$$

$$\int_0^\tau \phi_i(t,\tau)\, \phi_j(t,\tau)dt = \delta_{ij} \quad * \qquad (4)$$

$$E\, n_i(\tau) = E\, n(t) = 0$$

$$E[n_i(\tau)]^2 = 1.$$

Si le processus de bruit est stationnaire, la loi de probabilité des coefficients ne dépend que de la longueur de l'intervalle d'intégration. Ces coefficients sont des constantes aléatoires dans tout l'intervalle, tandis que les fonctions propres sont des fonctions certaines de temps.

L'équation (2) possède un noyau symétrique défini-positif, donc les valeurs propres λ_i sont toutes positives et réelles ([17], Chap. IV). Si $\psi(t,u)$ est continue en t et u à l'origine (condition toujours satisfaite en pratique, sinon le processus aurait une puissance non-nulle

---

*A une valeur propre ne peut correspondre qu'un ensemble fini de fonctions propres linéairement indépendentes. Cet ensemble peut être rendu orthogonal, tel que

$$\int_0^\tau \phi_i(t,\tau)\phi_j(t,\tau)dt = \delta_{ij}$$

pour toute fonction différente, bien que $\lambda_i = \lambda_j$.

à l'infini), elle est continue partout (voir [18], p. 98 propriété VII). Donc les fonctions propres $\phi_i(t,\tau)$ sont continues en t (voir [19], par exemple). On peut écrire la covariance sous la forme

$$\psi(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\tau)\, \phi_i(t,\tau)\, \phi_i(u,\tau) \qquad (5)$$

où la somme converge uniformément et absolument pour toute t et u dans $(0, \tau)$. En mettant u=t et intégrant de zéro à τ, on a la propriété bien-connue des valeurs propres d'un processus stationnaire:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\tau) = \int_0^{\tau} \psi(o)dt = \sigma_n^2\, \tau. \qquad (6)$$

La somme des valeurs propres est égale à l'énergie moyenne totale du bruit dans l'intervalle d'observation. Évidemment, $\lambda_i \to 0$ lorsque $i \to \infty$ si la puissance de bruit est finie (supposition qui sera enfreinte en considérant le modèle de bruit blanc).

Jusqu'à ici on n'a supposé ni le bruit laplacien ni stationnaire. La stationnarité n'est pas indispensable, mais commode; nous la supposerons en écrivant la covariance sous la forme $\psi(t-u)$. Il est plus important que le bruit soit laplacien, pour pouvoir conclure que le défaut de corrélation entre les coefficients du développement K-L en entraîne l'indépendance. Si le processus est laplacien, l'intégrale définissant $n_i(\tau)$, considérée comme limite d'une somme approximative, existe et définit des coefficients laplaciens.

L'essentiel dans cette étude est une méthode analytique qui nous permette

---

* $\sigma_n^2 = \psi(o)$.

d'attribuer une densité de probabilité à une courbe continue, pour pouvoir évaluer le rapport de vraisemblance. Le développement K-L permet la représentation sur un intervalle fini d'un processus continu par moyen d'une somme dénombrable de quantités aléatoires indépendantes. Par conséquent la densité de probabilité de la courbe est la densité conjointe de ces quantités indépendantes, elle est alors le produit des densités individuelles de ces événements composants. Tout autre méthode conduisant au rapport de vraisemblance serait aussi convenable que le développement K-L. Parzen(20) considère les estimateurs et prévoyeurs, à variance minimum, d'un point de vue plus général, mais la résolution des problèmes associés à l'observation permanente mène au développement K-L.

Chapitre 2

DIVERS RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

2.1 Continuité des Fonctions et Valeurs Propres

Dans ce sous-chapitre nous obtenons des résultats au sujet du développement sur l'intervalle $(0,T)$ d'un processus stationnaire $n(t)$ par les fonctions propres de la covariance. Nous nous intéressons principalement au comportement des valeurs et fonctions propres lorsque l'intervalle s'étend de façon permanente.

Théorème: Les valeurs propres $\lambda_1(\tau)$ sont des fonctions continues du paramètre τ, si $\psi(x,y)$ est bornée.

Preuve: Le noyau symétrique $\psi(s,t)$ possède le spectre $\lambda_1(\tau),\lambda_2(\tau),\ldots$ où $\lambda_1(\tau)\geq\lambda_2(\tau)\geq \ldots \geq 0$. La plus grande valeur propre $\lambda_1(\tau)$ est donnée (voir [17], Chap. IV, §5) par l'expression

$$\lambda_1(\tau) = \operatorname*{Max}_h \int_0^\tau dx\, h(x) \int_0^\tau dy\, h(y)\psi(x,y) \qquad (1)$$

où h est mesurable au sens de Lebesgue et $\int_0^\tau h^2(x)\,dx = 1$.

Désignons par $\hat{h}(x)$ la fonction $h(x)$ rendant (1) maximum.

$$1) \qquad \lambda_1(\tau') \geq \lambda_1(\tau) \text{ si } \tau' > \tau\ . \qquad (2)$$

Preuve: Soit $m(\tau',g) = \int_0^{\tau'} dx g(x) \int_0^{\tau'} dy g(y)\psi(x,y)$, où g est mesurable et $\int_0^{\tau'} g^2(x)dx = 1$. Soit

$$f(x)= \begin{cases} \hat{h}(x) & 0 \leq x \leq \tau \\ 0 & \tau \leq x \leq \tau' \end{cases}$$

Donc $m(\tau',f) = \lambda_1(\tau)$.

Évidemment, $\lambda_1(\tau') = \max_g m(\tau',g) \geq m(\tau',f) = \lambda_1(\tau)$.

Puis nous montrons

$$2) \quad \lim_{\tau' \to \tau} \lambda_1(\tau') \leq \lambda_1(\tau). \tag{3}$$

Preuve: Soit $\hat{g}$ la fonction rendant maximum $m(\tau',g)$. En segmentant le domaine d'intégration, on écrit

$$\lambda_1(\tau') = \int_0^\tau dx\hat{g}(x) \int_0^\tau dy\hat{g}(y)\psi(x,y) + \int_0^\tau dx\hat{g}(x) \int_\tau^{\tau'} dy\hat{g}(y)\psi(x,y) + \int_0^{\tau'} dy\hat{g}(y) \int_\tau^{\tau'} dx\hat{g}(x)\psi(x,y). \tag{4}$$

Soit $\int_0^\tau dx g^2(x) = k \leq 1$.

De (1), $\lambda_1(\tau) \geq \frac{1}{k} \int_0^\tau dx\hat{g}(x) \int_0^\tau dy\hat{g}(y)\psi(x,y) \geq \int_0^\tau dx\hat{g}(x) \int_0^\tau dy\hat{g}(y)\psi(x,y)$.

Puisque $|\psi(x,y)| \leq \sigma_n^2$, $\int_0^\tau dx\hat{g}(x) \int_\tau^{\tau'} dy\hat{g}(y)\psi(x,y) \leq \int_0^\tau dx|\hat{g}(x)| \int_\tau^{\tau'} dy|\hat{g}(y)|\sigma_n^2$

$$\leq \int_0^{\tau'} dx|\hat{g}(x)| \int_\tau^{\tau'} dy|\hat{g}(y)|\sigma_n^2.$$

Donc on a

$$\lambda_1(\tau') \leq \lambda_1(\tau) + 2\sigma_n^2 \int_0^{\tau'} dx|\hat{g}(x)| \int_\tau^{\tau'} dy|\hat{g}(y)| .$$

Puisque $\hat{g}(y)$ est mesurable, $\lim_{\tau' \to \tau} \int_\tau^{\tau'} dy|\hat{g}(y)| = 0$, et enfin

$$\lim_{\tau' \to \tau} \lambda_1(\tau') \leq \lambda_1(\tau).$$

3) Il résulte de (2) et (3) que $\lim_{\tau' \to \tau} \lambda_1(\tau') = \lambda_1(\tau)$, et donc $\lambda_1(\tau)$ est continue.

4) La covariance

$$\Psi'(x,t) = \Psi(x,y) - \lambda_1(\tau)\, \phi_1(x,\tau)\, \phi_1(y,\tau)$$

est symétrique et possède le spectre λ_2, λ_3, ... Par analogie on à la continuité de λ_2. Ad infinitum pour toute valeur propre.

On ne peut pas espérer la continuité virtuelle des fonctions propres, car celles-ci sont à signe arbitraire et peuvent être dégénérées. Pourtant, soit $\lambda_i(T)$ une valeur propre d'ordre t, et soit $\{\lambda_{ij}(u)\}$ l'ensemble des r valeurs propres qui tendent vers $\lambda_i(T)$ lorsque u tend vers T. (On tient compte des valeurs dégénérées sur l'intervalle (0,u) au moyen de l'artifice suivant: à chaque $\lambda_{ij}(u)$ ne correspond qu'une fonction propre independante, mais certaines des $\lambda_{ij}(u)$ peuvent être égales.) Alors, on à le théorème suivant:

Théorème: L'éspace linéaire engendré par les r fonctions propres linéairement indépendantes $\{\phi_{ij}(s,u)\}$ converge uniformément à l'éspace linéaire engendré par les r fonctions propres linéairement indépendantes $\{\phi_{ij}(s,T)\}$, lorsque $u \to T$.

Preuve: Pour toute $s<u$, et chacune des valeurs propres, on à

$$\lambda_{ij}(u)\, \phi_{ij}(s,u) - \int_0^u \Psi(t-s)\, \phi_{ij}(t,u)dt = 0, \qquad (5)$$

donc le membre gauche "tend" uniformément vers la limite zéro lorsque $u \to T$.

D'autre part,

$$\lim_{u\to T}\left[\lambda_{ij}(u)\,\phi_{ij}(s,u) - \int_o^u \Psi(t-s)\,\phi_{ij}(t,u)dt\right]$$

$$= \lim_{u\to T}\left[\lambda_i(T)\,\phi_{ij}(s,u) - \int_o^T \Psi(t-s)\,\phi_{ij}(t,u)du\right] - \lim_{u\to T}\int_T^u \Psi(t-s)\,\phi_{ij}(t,u)dt$$

si les deux limites existent. Mais $\phi_{ij}(t,u)$ est bornée si u varie sur un intervalle fini*; donc la dernière limite existe et est égale à zéro. L'autre limite existe aussi, et on peut écrire

---

* a. Preuve que $\phi_i(t,\tau)$ est une fonction bornée de τ pour chaque t, si $\lambda_i(t)$ est continue, et ψ est définie-positive:

1) $$K(t,\tau) \equiv \int_o^\tau ds\,[\psi(s-t)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty}[\lambda_i\phi_i(t,\tau)]^2 \qquad \text{(v. [17], eq. 3.47)}$$

$$\geq \max_i [\lambda_i\phi_i(t,\tau)]^2.$$

2) $K(t,T + \Delta T) \geq K(t,T)$, et $\lim_{\Delta T\to 0} K(t,T + \Delta T) = K(t,T)$.

3) $$\lim_{\Delta T\to 0}\frac{K(t,T+\Delta T)}{[\lambda_i(T+\Delta T)]^2} = \frac{K(t,T)}{[\lambda_i(T)]^2} \geq \overline{\lim_{\Delta T\to 0}}\,[\phi_i(t,T+\Delta T)]^2.$$

b. Le membre gauche est borné uniformément par $\sup_t \dfrac{K(t,T)}{[\lambda_i(T)]^2}$, $\lambda_i(T)$ étant non-nulle parce que Ψ est definie-positive.

$$\lim_{u\to T}\left[\lambda_{ij}(u)\,\phi_{ij}(s,u) - \int_o^u \Psi(t-s)\,\phi_{ij}(t,u)dt\right]$$

$$= \lim_{u\to T}\left[\lambda_i(t)\,\phi_{ij}(s,u) - \int_o^T \Psi(t-s)\,\phi_{ij}(t,u)dt\right]$$

$$= 0\ , \qquad (6)$$

la convergence étant uniforme.

Il résulte d'un lemme de Courant* que n'importe quelle suite de fonctions uniformément bornées satisfaisant à l'équation (6) est à dimension asymptotique finie; évidemment la dimension est égale à r.**

Il en résulte immédiatement que l'espace généré par les $\{\phi_{ij}(s,u)\}$ converge uniformément à celui des $\{\phi_{ij}(s,T)\}$.

2.2 La Fonction de Test

On considérera ci-dessous le développement d'une fonction certaine s(t) par les fonctions propres du processus de bruit. On définit

$$s_i(\tau) = \int_o^\tau \frac{s(t)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}}\,\phi_i(t,\tau)dt. \qquad (1)$$

Le terme-clef sera la série infinie $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$. Soumis à diverses conditions, on pourra écrire cette série sous la forme

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_o^T s(t)f(t,\tau)dt \qquad (2)$$

---

*Réference [17], paragraphe III. 8.

**C'est-à-dire que, u étant assez près de T et les $\{\phi_{ij}(s,u)\}$ étant continues, les $\phi_{ij}(s,u)$ peuvent être approximées à chaque valeurs, arbitrairement bien par les combinaisons linéaires des r fonctions propres $\{\phi_{ij}(s,T)\}$.

où $f(t,\tau)$ est la solution à l'équation intégrale

$$s(t) = \int_0^T du f(u,\tau)\psi(t-u). \tag{3}$$

Nous voulons étudier les conditions telles que cette représentation soit valable. On sait que $f(t)$, étant donnée par la série

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i(\tau)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}} \phi_i(t,\tau), \tag{4}$$

satisfait à (3) à condition que (4) converge.

Par ailleurs, cette solution est unique: si la série (4) converge, toute solution à (3) est donnée par (4).

On montre ensuite que

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 = \int_0^T f(t,\tau)s(t)dt \tag{5}$$

si (3) est satisfaite.

S'il existe une $f(t)$ satisfaisant à (3), on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i(\tau)\, f_i(\tau)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^T f(u)\phi_i(u)\sqrt{\lambda_i}\, du\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T f(u)du \int_0^T f(t)dt\, \lambda_i\phi_i(u)\phi_i(t)$$

$$= \int_0^T f(u)du \int_0^T f(t)dt\psi(t-u)$$

$$= \int_0^T f(u)s(u)du \ . \qquad (6)$$

La première égalité résulte de (3), et la quatrième est due au théorème de Mercer. Nous introduisons l'idée de la fonction de test à cause de la grande simplicité de (4).

La discussion de la fonction de test dépend de la convergence de la série (3). Par le théorème de Riesz-Fischer, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i(\tau)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}} \phi_i(t,\tau)$$

converge est la convergence de

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^2(\tau)}{\lambda_i(\tau)} \ .$$

Pourtant, en pratique $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\tau)$ converge rapidement et la fonction de test n'existe que rarement comme fonction mesurable.

Il y a, néanmoins, deux motifs pour l'introduction formelle de la fonction $f(t,\tau)$. Premièrement, on a l'égalité (6) qui simplifie nos recherches calculatrices et analytiques. De plus, la solution $f(t,\tau)$ existe souvent si on admet les distributions au sens de Schwartz[21]. Nous interpréterons ses fonctions généralisées dans les bornes de la théorie des fonctions.

Il existe une littérature considérable[22,23] à propos de la résolution de l'équation (4) lorsque $\psi(t-u)$ satisfait à

$$\psi(t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, A \frac{\prod_{k=1}^{n} (i\omega+\omega_k)\,(i\omega-\omega_k)}{\prod_{j=1}^{m} (i\omega+\omega_j)\,(i\omega-\omega_j)} e^{i\omega(t-u)}. \qquad (7)$$

Cette équation n'est pas si spéciale qu'elle le parait; les processus à spectre rationnel ont une grande importance pour les modèles physiques de bruit. Le bruit dans un réseau électrique à paramètres localisés, par exemple, s'exprime toujours sous cette forme. En outre, plusieurs fonctions non-rationelles décrivant les spectres de bruit mènent à un processus prévisible (voir les Chapitres 4.2 et 6, et la Section 2.5 de [24]); par conséquent ils sont sans valeur comme modèle.

Si $m-n = 2j$, on peut écrire la "solution" $f(t)$ à (3) sous la forme

$$f(t) = g(t) + \sum_{n=0}^{j-1} \left\{ a_n \delta^{(n)}(t) + b_n \delta^{(n)}(\tau-t) \right\}, \qquad (8)$$

où $g(t)\ \epsilon L_2(o,\tau)$ est une fonction continue et $\delta^n(t)$ est la distribution définie par l'intégrale

$$\int_o^\tau s(t)\ \delta^n(t-\rho)dt = \frac{d^n}{dt^n} s(t) \Big|_{t=\rho} \qquad 0 < \rho < \tau\ . \qquad (9)$$

L'équation (9) n'a pas de solution mesurable. Pourtant on peut récrire (3) en fonction des intégrales de Stieltjes

$$s(t) = \sum_{n=0}^{j-1} \int_o^\tau \psi^n(t-u)dF_n(u), \quad \left(\psi^n(t-u) = \frac{d^n}{du^n} \psi(t-u)\right) \qquad (10)$$

et on trouve qu'il existe une solution à (4). Les spectres $F_n(u)$ sont les inconnus, et la solution possède la propriété analogue à (6). La solution (8) s'écrit correctement

$$F(u) \equiv \int_o^u f(t)dt = \sum_{k=o}^{j-1} F_k(u) \qquad (11)$$

où

$$F_o(u) = \int_o^u g(t)dt + \begin{cases} \alpha_o & t \le 0 \\ \alpha_o + a_o & 0 < t < \tau \\ \alpha_o + a_o + b_o & \tau \le t \end{cases}$$

$$F_n(u) = \begin{cases} \alpha_n & t \le 0 \\ \alpha_n + a_n & 0 < t < \tau \quad 1 \le n \le j-1 \\ \alpha_n + a_n + b_n & \tau \le t \, . \end{cases}$$

Les constantes α_n sont arbitraires et peuvent se prendre nulles. Nous voulons montrer que la solution (11) à (10) satisfait à l'équation

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i x_i = \sum_{n=o}^{j-1} \int_o^\tau x^n(t)dF_n(t)$$

pour n'importe quelle x(t) possédant j-1 dérivees continues. En particulier

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i{}^2 = \sum_{n=o}^{j-1} \int_o^\tau s^n(t)dF_n(t) \, .$$

Par définition,

$$s_i = \int_o^\tau \frac{s(t)\phi_i(t)dt}{\sqrt{\lambda_i}} \, ,$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \int_o^T \frac{s(t)\phi_i(t)dt}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_o^T \phi_i(t)dt \sum_{k=o}^{j-1} \int_o^T dF_k(u) \frac{d^k}{du^k} \psi(t-u)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}} \int_o^T \phi_i(t)dt \sum_{k=o}^{j-1} \int_o^T dF_k(u) \frac{d^k}{du^k} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(u)\phi_m(t)\lambda_m$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i\sqrt{\lambda_i} \sum_{k=o}^{j-1} \int_o^T dF_k(u) \frac{d^k}{du^k} \phi_i(u)$$

$$= \sum_{k=o}^{j-1} \int_o^T dF_k(u) \frac{d^k}{du^k} x(u) \qquad (12)$$

le résultat recherché. La première ligne résulte de (10); la deuxième et la dernière proviennent du théorème de Mercer (dans le cas d'un spectre rationnel, la convergence de la $(j-1)^{\text{ième}}$ dérivée est encore uniforme); la troisième ligne est due à l'orthogonalité des fonctions propres.

Donc l'hypothèse est démontrée, et on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i s_i = \int_o^T x(t)f(t)dt \qquad (13)$$

si le spectre est rationnel, bien que la fonction de test comporte des distributions de plusieurs ordres.

2.3 La Symétrie des Fonctions Propres

Chacune des fonctions propres $\phi_i(t,\tau)$ d'un processus stationnaire possède

une symétrie paire ou impaire autour du point $t=\tau/2$, propriété qui est utile au calcul de ces fonctions. Cette propriété est aisée à montrer.

L'équation de Fredholm est

$$\int_0^\tau \phi_i(t,\tau)\ \psi(t-u)dt = \lambda_i(\tau)\ \phi_i(u,\tau). \qquad (1)$$

Soit $t = \tau-v$, et substituer en (1):

$$\int_0^\tau \phi_i(\tau-v,\tau)\ \psi(\tau-v-u)dv = \lambda_i(\tau)\ \phi_i(u,\tau). \qquad (2)$$

Soit $x = \tau-u$. On a

$$\int_0^\tau \phi_i(\tau-v,\tau)\ \psi(x-v)dv = \lambda_i(\tau)\ \phi_i(\tau-x,\tau). \qquad (3)$$

Puisque $\psi(x-v) = \psi(v-x)$, et en mettant $t-v$, $u=x$, (3) devient

$$\int_0^\tau \phi_i(\tau-t,\tau)\ \psi(t-u)dt = \lambda_i\ \phi_i(\tau-u,\tau).$$

Mais celle-ci est l'équation satisfaite par $\phi_i(u,t)$. Les fonctions propres sont normalisées, donc $\phi_i(u,\tau) = \phi_i(\tau-u,\tau)$ ou $\phi_i(u,\tau) = -\phi_i(\tau-u,\tau)$.

Chapitre 3

L'ESTIMATION ET LA DÉTECTION

3.1 Le Problème de Détection

Nous voulons étudier le problème suivant:

Étant donnée une courbe $x(t)$ comportant du bruit laplacien $n(t)$ à covariance connue, $x(t)$ comporte-t-il aussi un signal certain $s(t)$ connu à l'exception d'un ensemble fini de paramètres $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$? Nous voulons exposer en lignes générales le test séquentiel décidant entre les alternatifs $x(t) = n(t)$ et $x(t) = n(t) + s(t)$.

Précisons la notation avant de poursuivre le problème. $x(t)$ représente une fonction de temps qui attribue une valeur x_o à chaque époque $t_o > 0$. Désignons par $x(t,\tau)$ la fonction attribuant une valeur x_o à chaque époque $t_o < \tau$. Évidemment l'observateur ne peut avoir à sa disposition que $x(t,\tau)$ à l'époque τ. Lorsque $\tau \to \infty$, $x(t,\tau) \to x(t)$. Des définitions semblables sont valables pour $s(t)$ et $n(t)$.

Définissons α - la probabilité conditionelle de décider que $s(t)$ est présent lorsqu'en effet il est absent (probabilité de fausse alerte); et β - la probabilité de décider que $s(t)$ est absent lorsqu'il est présent (probabilité de faux rejet). Si on fait des observations indépendantes sur le processus $x(t)$, c'est le test séquentiel du rapport de vraisemblance qui rend minimum la durée d'observation parmi tous les tests qui achèvent les probabilités d'erreur ne dépassant pas α et β.[13,25]*

$$L(\tau) = \frac{\text{Probabilité } [x(t,\tau) = s(t,\tau) + n(t,\tau)]}{\text{Probabilité } [x(t,\tau) = n(t,\tau)]} \qquad (1)$$

*Wald et Wolfowitz ont démontré cette proposition au cas discret, et on l'étend au cas permanent aux paragraphes 4.3 et 4.4.

On compare ce rapport aux deux seuils $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Si $\alpha, \beta < \frac{1}{2}$, on a $A > B$. Le test prend fin avec la décision que $s(t)$ est présent lorsque $L(\tau)$ dépasse A; la décision est que $s(t)$ est absent lorsque $L(\tau)$ traverse B. $(A > L(o) > B)$.

Nous voulons écrire sous forme explicite les probabilités figurant dans (1). Ceci est façile si on peut écrire la probabilité du continuum d'événements $x(t,\tau) = s(t,\tau) + n(t,\tau)$ comme produit d'un nombre dénombrable d'événements constituants indépendants. La probabilité de cet événement-là est le produit des probabilités des événements composants.

Nous traiterons séparément, mais par des méthodes analogues, le cas discret et le cas permanent.

3.2 Cas Discret

Dans ce cas la fonction $x(t,\tau)$ ne prend valeur qu'aux époques discrètes $t_1, t_2, \ldots, t_m \leq \tau$. Soit $t_n \leq \tau \leq t_{n+1}$. Donc la fonction $x(t,\tau)$ se réduit au vecteur à n dimensions $\vec{X}(n)$ ayant comme composantes les valeurs $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$. On définit $\vec{S}(n)$ et $\vec{N}(n)$ par analogie. La fonction de covariance se réduit à la matrice à dimension infinie $\psi(\infty) \equiv || \psi (t_i - t_j) ||$. Le rapport de vraisemblance devient

$$L(n) = \frac{\text{Prob}\left[\vec{X}(n) = \vec{N}(n) + \vec{S}(n)\right]}{\text{Prob}\left[\vec{X}(n) = \vec{N}(n)\right]} = \frac{\text{Prob}\left[\bigcap_{j=1}^{n} [x(t_j) = n(t_j) + s(t_j)]\right]}{\text{Prob}\left[\bigcap_{j=1}^{n} [x(t_j) = n(t_j)]\right]} \qquad (1)$$

Malheureusement les composantes des vecteurs aléatoires $\vec{N}(n)$ et $\vec{X}(n)$ ne sont pas en général indépendantes; on ne peut pas encore écrire les quantités entre parenthèses comme des produits de probabilités simples. Nous recherchons un système de coordonnées tel qu'on puisse écrire sur l'intervalle $0 \leq t_i \leq \tau$ (ou bien $0 \leq i \leq n$)

$$\vec{N}(n) = \sum_{i=1}^{n} n_i \vec{\phi}_i \sqrt{\lambda_i}$$

avec des vecteurs à n-dimensions $\vec{\phi}_i$ orthonormaux:

$$\vec{\phi}_i \cdot \vec{\phi}_j = \delta_{ij} ,$$

et des coefficients indépendants et normalisés

$$En_i n_j = \delta_{ij} .$$

Définissons la matrice de covariance à n dimensions $\psi(n) = ||\psi(t_i,t_j)||$, $(t_i,t_j \leq \tau$ ou bien $i,j \leq n)$. Les vecteurs recherchés sont les vecteurs propres de cette matrice, i.e., les solutions à l'équation matricielle

$$\psi(n)\, \vec{\phi}(n) = \lambda(n)\, \vec{\phi}(n) . \qquad (2)$$

Les coefficients

$$n_i(n) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(n)}}\, \vec{N}(n) \cdot \vec{\phi}_i(n)$$

n'ont pas de corrélation, donc ils sont indépendants (les n(t) sont supposées laplaciennes). Il en résulte la représentation recherchée pour les époques $0 \leq t_i \leq \tau$ (voilà l'analogue discret au développement K-L). En définissant $s_i(n) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(n)}}\, \vec{S}(n) \cdot \vec{\phi}_i(n)$ et $x_i(n) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(n)}}\, \vec{X}(n) \cdot \vec{\phi}_i(n)$, on peut écrire l'expression (1) sous la forme désirée:

$$L(n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \text{Prob}[x_i = s_i + n_i]}{\prod_{i=1}^{n} \text{Prob}[x_i = n_i]} = \frac{\exp\left[\sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i - s_i)^2}{2}\right]}{\exp\left[\sum_{i=1}^{n} -\frac{x_i^2}{2}\right]} \qquad (3)$$

ou

$$\log L(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{s_i^2}{2} + x_i s_i\right) . \qquad (4)$$

On écrira fréquemment s_i au lieu de $s_i(n)$ quand aucune ambigüité ne peut en résulter. Le logarithme du rapport de vraisemblance peut s'écrire sans utiliser les vecteurs et valeurs propres (voir l'analogue au sous-chapitre 2.2).

Définissons implicitement le vecteur $\vec{F}(n)$ par l'équation $\vec{S}(n) = \psi(n)\vec{F}(n)$. Évidemment la définition explicite de $\vec{F}(n)$ est donnée au moyen de l'inverse de la matrice de covariance $\psi^{-1}(n)\vec{S}(n) = \vec{F}(n)$. Si on pose $f_i = \frac{\vec{F}\cdot\vec{\phi}_i}{\sqrt{\lambda_i(n)}}$, le vecteur $\vec{F}(n)$ s'exprime en fonction des vecteurs propres

$$\vec{F}(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i(n)}\, f_i(n)\, \vec{\phi}_i(n). \qquad (5)$$

En utilisant le vecteur $\vec{F}(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(n)}{\sqrt{\lambda_i(n)}} \vec{\phi}_i(n)$, on écrit

$$\vec{F}(n) \cdot \vec{S}(n) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\sqrt{\lambda_i}} \vec{\phi}_i\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} s_j \sqrt{\lambda_j}\, \vec{\phi}_j\right] = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$$

et

$$\vec{F}(n) \cdot \vec{X}(n) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\sqrt{\lambda_i}} \vec{\phi}_i \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{\lambda_i} \vec{\phi}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \cdot$$

Donc le rapport de vraisemblance (3) s'écrit

$$\vec{L}(n) = \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{F}(n) \cdot \vec{S}(n) + \vec{F}(n) \cdot \vec{X}(n) \right] \qquad (6)$$

En exécutant un test sur la courbe observée $x(t)$, le premier pas consiste à composer les estimées des paramètres π_i. Les termes s_i ne se trouvent qu'au numérateur du rapport de vraisemblance; donc les estimées rendant maximum la fonction de vraisemblance en présence de signal [i.e., Prob. $(x(t) = n(t) + s(t,\pi)]$ rendent maximum le rapport de vraisemblance., Puis on accomplit la détection en supposant que les valeurs estimées sont les vraies valeurs des paramètres. Les estimées sont des fonctions de la durée d'observation τ.

Si les observations sont indépendantes, il n'est pas nécessaire de transformer le système des coordonnées: l'équation (1) comporte des probabilités d'événements indépendants. L'analyse de tels tests se réduit à l'application de l'analyse séquentielle d'après Wald.[11,12,13] Si les observations sont dépendantes, on se sert de la transformation des équations (2) et (3) pour obtenir une expression assez simple du rapport de vraisemblance. Un alternatif est le filtre "blanchissant" du paragraphe 4.2, qui produit un test équivalent pour la présence d'un signal variable dans du bruit blanc. L'analyse spéciale de Wald de la durée moyenne du test n'est pas applicable dans le cas de signal variable ou dans celui de bruit coloré.

Log L(n) doit être traité comme processus stochastique laplacien dont il faut étudier le problème de premier passage. C'est un processus de Markoff (voir 3.4) et les fonctions significatives sont la moyenne et la covariance, obtenues ci-dessous.

En absence de signal, $\vec{X}(n) = \vec{N}(n)$, et

$$E \log L(n) = -\frac{\vec{F}(n) \cdot \vec{S}(n)}{2} + E\, \vec{F}(n) \cdot \vec{N}(n) = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \qquad (7)$$

$$\text{Var Log } L(n) = E[\vec{F}(n) \cdot \vec{N}(n)]^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \qquad (8)$$

En présence de signal, $\vec{X}(n) = \vec{S}(n) + \vec{N}(n)$.

$$E \text{ Log } L(n) = E\left(+\frac{\vec{F}(n) \cdot \vec{S}(n)}{2} + \vec{F}(n) \cdot \vec{N}(n)\right) = + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \ . \qquad (9)$$

$$\text{Var log } L(n) = E\, F(n) \cdot N(n) = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \ .$$

Considérons la partie aléatoire, $Z'(n) = \vec{F}(n) \cdot \vec{N}(n)$, de log L(n). La fonction de répartition du processus ne dépend pas de la présence du signal. La covariance de Z'(n) est

$$E\, Z'(n)Z'(m) = E[\vec{F}(n) \cdot \vec{N}(n)]\,[\vec{F}(m) \cdot \vec{N}(m)] \ . \qquad m \geq n$$

$$= E \sum_{i=1}^{n} n_i(n)s_i(n) \sum_{j=1}^{m} n_j(m)s_j(m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{s_i(n)s_j(m)}{\sqrt{\lambda_i(n)\lambda_j(m)}} E[\vec{N}(n) \cdot \vec{\phi}_i(n)]\,[\vec{N}(m) \cdot \vec{\phi}_j(m)]. \qquad (10)$$

Soit $[V(n)]_u$ la u'ième composante du vecteur $\vec{V}(n)$. Donc

$$E\,[\vec{N}(n)\cdot\vec{\phi}_i(n)]\,[\vec{N}(m)\cdot\vec{\phi}_j(m)]$$

$$= E\left[\sum_{u=1}^{n}[N(n)]_u\,[\phi_i(n)]_u\;\sum_{v=1}^{m}[N(m)]_v\,[\phi_j(m)]_v\right]. \qquad (11)$$

Mais la u'ième composante du vecteur $\vec{N}(n)$ est $n(t_u)$, identique à la u'ième composante de $\vec{N}(m)$. En mettant $\psi_{u,v} = E\,n(t_u)n(t_v)$, le membre droit de (11) donne

$$\sum_{u=1}^{n}[\phi_i(n)]_u\;\sum_{v=1}^{m}\psi_{u,v}\,[\phi_j(m)]_v\,.$$

Il résulte de l'équation matricielle (2) que, pour toute composante u,

$$\sum_{v=1}^{n}\psi_{u,v}\,[\phi_j(m)]_v = \lambda_j(m)\,[\phi_j(m)]_u\,. \qquad (12)$$

Puis l'équation (10) devient

$$E\,Z'(n)Z'(m) = \sum_{i=1}^{n}\frac{s_i(n)}{\sqrt{\lambda_i(n)}}\;\sum_{u=1}^{n}[\phi_i(n)]_u\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_j(m)}\;s_j(m)\,[\phi_j(m)]_u\,. \qquad (13)$$

Par définition du développement en fonctions propres,

$$s(t_u) = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_j(m)}\;s_j(m)[\phi_j(m)]_u\,.$$

En plus,

$$\sum_{u=1}^{n} [\phi_i(n)]_u s(t_u)$$

$$= \vec{\phi}_i(n) \cdot \vec{S}(u)$$

$$= s_i(n) \sqrt{\lambda_i(n)}$$

et donc on a de (13):

$$E\, Z'(n)\, Z'(m) = \sum_{i=1}^{n} s_i^2(n) \,. \tag{14}$$

On trouve que la covariance $\psi_Z(n,m)$ du processus Z' est égale à la variance de Z'(n) pour m > n mais autrement arbitraire. On aura un résultat analogue au cas permanent.

3.3 Cas Permanent

Considérons le rapport de vraisemblance

$$L(\tau) = \frac{\text{Probabilité } [x(t,\tau) = s(t,\tau) + n(t,\tau)]}{\text{Probabilité } [x(t,\tau) = n(t,\tau)]} \tag{1}$$

Grenander[3] a montré que

$$L(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{\text{Prob}\left[\bigcap_{i=1}^{N} x_i(\tau) = s_i(\tau) + n_i(\tau)\right]}{\text{Prob}\left[\bigcap_{i=1}^{N} x_i(\tau) = n_i(\tau)\right]}$$

$$= \exp \sum_{i=1}^{\infty} \left(- \frac{s_i(\tau)^2}{2} + x_i(\tau)\, s_i(\tau) \right) \tag{2}$$

presque sûrement, les $s_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ et $x_i(\tau)$ étant les coefficients des

développements K-L des processus respectifs. Soit $\psi(t,s) = En(t)n(s)$ la covariance du processus de bruit. Dans ce cas le rapport de vraisemblance s'exprime explicitement en termes des coefficients $x_i(\tau)$ et $s_i(\tau)$. On peut définir implicitement la fonction $F(t,\tau)$ par analogie à $F(n)$, mais on n'est pas sûr de son existence (voir 2.2).*

Au cas d'un spectre rationnel, on peut introduire la fonction de test à condition que des conditions convenables soient satisfaites (voir chapitre 2.2). Donc on écrit

$$Z(\tau) = \log L(\tau)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\tau F(t,\tau)\, s(t)dt + \int_0^\tau F(t,\tau)x(t)dt. \qquad (3)$$

En absence de signal, $x(t) = n(t)$ et

$$E_N Z(\tau) = E\left[\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{s_i^2(\tau)}{2} + n_i(\tau)s_i(\tau)\right]$$

---

* Dans la suite, les opérations d'intégration finie et sommation infinie sont commutatives au cas rationnel régulier:

Au cas régulier, $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2$ sont finies (voir l'éq. 1.6 et chap. 6) et donc $\sum_{i=1}^{\infty} | s_i \sqrt{\lambda_i} |$ est finie. Au cas rationnel, $\phi_i(t)$ est uniformément bornée (voir p. 10). Donc $\chi \equiv \sup_{j,t} \phi_j(t) \sum_{i=1}^{\infty} | s_i \sqrt{\lambda_i} | \geq \max_j \sum_{i=1}^{j} s_i \sqrt{\lambda_i}\, \phi_i(t)$ est fini, et $\int_0^\tau \chi\, dt = \chi\tau$ est finie. Du théorème de Lebesgue (v. [19]) l'intégration finie et la sommation de $\sqrt{\lambda_i}\, s_i\phi_i(t)$ sont commutatives.

$$= - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^2(\tau)}{2} = - \frac{1}{2} \int_0^T F(t,\tau)s(t)dt \qquad (4)$$

$$\mathrm{Var}_N\, Z(\tau) = E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(n_i(\tau)s_i(\tau) \right) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)\, En_i^2(\tau)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^T F(t,\tau)s(t,\tau)dt \ . \qquad (5)$$

En présence de signal, $x(t) = s(t) + n(t)$ et

$$E_S Z(\tau) = + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^2(\tau)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^T F(t,\tau)s(t)dt \ .$$

$$\mathrm{Var}_N\, Z(\tau) = \mathrm{Var}_S\, Z(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^T F(t,\tau)s(t)dt \ . \qquad (6)$$

Si le processus n(t) est laplacien, $Z(\tau)$ l'est aussi. La seule fonction qui manque à décrire $Z(\tau)$ est la covariance. Soit $Z'(\tau) = Z(\tau) - EZ(\tau)$. Donc

$$< Z'(\tau)\, Z'(\rho) > = E \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_i(\tau)\, s_i(\tau) \cdot n_j(\rho)s_j(\rho)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} s_i(\tau)s_j(\rho) \int_0^T \frac{dt\ \phi_i(t,\tau)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}} \int_0^{\rho} \frac{du\ \phi_j(u,\rho)}{\sqrt{\lambda_j(\rho)}}\ \psi(t-u)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} s_i(\tau)s_j(\rho) \int_0^{\tau} dt\ \phi_i(t,\tau)\ \phi_j(t,\rho) \sqrt{\frac{\lambda_j(\rho)}{\lambda_i(\tau)}} \ .$$

En écrivant $s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\rho) \sqrt{\lambda_j(\rho)}\ \phi_j(t,\rho)$ $(0 \le t \le \rho)$, on a

$$< Z'(\tau)\ Z'(\rho) > = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{dt\ \phi_i(t,\tau)s_i(\tau)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}}\ s(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{dt\ \phi_i(t,\tau)s_i(\tau)}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t,\tau)s_j(\tau)\ \sqrt{\lambda_j(\tau)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) \ . \qquad (7)$$

La fonction $F(t,\tau)$ donne ce résultat beaucoup plus directement

$$< Z'(\tau)\ Z'(\rho) > = E \int_0^{\tau} dtF(t,\tau)n(t) \int_0^{\rho} F(u,\rho)n(u)du$$

$$= \int_0^{\tau} dtF(t,\tau) \int_0^{\rho} F(u,\rho)\psi(t-u)du$$

$$= \int_0^{\tau} dtF(t,\tau)s(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) \qquad \rho \ge \tau \qquad (7)$$

Par conséquent le logarithme du rapport de vraisemblance est laplacien à moyenne non-stationnaire $\pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^2}{2}$, à variance non-stationnaire $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$, et à covariance égale à la variance à l'époque antérieure.

3.4 Preuve que le Logarithme du Rapport de Vraisemblance est un Processus de Markoff

Nous voulons montrer que $Z(t)$ est un processus de Markoff. Soit $Z'(\tau) = Z(\tau) - EZ(\tau)$ et écrivons la fonction conditionelle laplacienne de répartition (voir [26] Sec. 24.6):

$$f(Z'(a)|Z'(b)) = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{2\pi\lambda}} \quad \exp\left[-\frac{\lambda_{11}}{2\lambda}\left(Z'(a) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} Z'(b)\right)^2\right], \quad a \geq b . \qquad (1)$$

λ est le déterminant de la matrice de covariance, et λ_{ij} en est le cofacteur indiqué par l'indice. $\left(\mu_{ab} = E\, Z'(a)\, Z'(b)\right)$.

$$\lambda = \begin{vmatrix} \mu_{aa} & \mu_{ab} \\ \mu_{ab} & \mu_{bb} \end{vmatrix} = \mu_{aa}\mu_{bb} - \mu_{ab}^2 .$$

Mais $\mu_{ab} = \mu_{bb}$, et

$$\lambda = \mu_{bb}(\mu_{aa} - \mu_{bb}) . \qquad (2)$$

De même,

$$\lambda_{11} = \mu_{bb}$$

$$\lambda_{12} = \mu_{ab}$$

et par conséquent

$$f(Z'(a)|Z'(b)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(\mu_{aa}-\mu_{bb})}} \exp\left[-\frac{1}{2(\mu_{aa}-\mu_{bb})}(Z'(a)-Z'(b))^2\right] . \quad (3)$$

La densité conditionelle est

$$f(Z'(a)|Z'(b),Z'(c)) = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{2\pi\lambda}} \exp\left[-\frac{\lambda_{11}}{2\lambda}\left(Z'(a) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} Z'(b) + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{11}} Z'(c)\right)^2\right] .$$

Après de longs calculs, on a

$$\lambda = \begin{vmatrix} \mu_{aa} & \mu_{bb} & \mu_{cc} \\ \mu_{bb} & \mu_{bb} & \mu_{cc} \\ \mu_{cc} & \mu_{cc} & \mu_{cc} \end{vmatrix} = \mu_{cc} (\mu_{bb} - \mu_{cc}) (\mu_{aa} - \mu_{bb})$$

$$\lambda_{11} = \begin{vmatrix} \mu_{bb} & \mu_{cc} \\ \mu_{cc} & \mu_{cc} \end{vmatrix} = \mu_{cc} (\mu_{bb} - \mu_{cc})$$

$$\lambda_{12} = -\begin{vmatrix} \mu_{bb} & \mu_{cc} \\ \mu_{cc} & \mu_{cc} \end{vmatrix} = -\mu_{cc} (\mu_{bb} - \mu_{cc})$$

$$\lambda_{13} = \begin{vmatrix} \mu_{bb} & \mu_{cc} \\ \mu_{bb} & \mu_{cc} \end{vmatrix} = 0,$$

et puis

$$f(Z'(a)|Z'(b),Z'(c)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(\mu_{aa}-\mu_{bb})}} \exp\left[-\frac{1}{2(\mu_{aa}-\mu_{bb})}(Z'(a)-Z'(b))^2\right]$$

$$= f(Z'(a)|Z'(b)). \qquad (4)$$

Cette démonstration dépend du fait que $a \geq b \geq c$, mais elle ne dépend pas des valeurs particulières de b et de c. Par conséquent, $Z'(\tau)$ est un processus de Markoff.

Ce resultat pouvait être prévu. Le rapport de vraisemblance est une statistique exhaustive, et donc $Z(\tau_o)$ comporte toute l'information de $x(t,\tau_o)$. La valeur $Z(\tau_1)$, $\tau_1 < \tau_o$, ne donne pas de nouvelle information quant à $x(t)$. Une extrapolation de $Z(\tau)$ fondée sur la connaissance de $Z(\tau_o)$ ne peut pas être améliorée au moyen de la connaissance de $Z(\tau_1)$. Ce résultat ne dépend pas de la covariance de $x(t)$ à condition que $x(t)$ soit laplacien.

Chapitre 4

LE TEST SÉQUENTIEL OPTIMUM POUR LA PRÉSENCE D'UN SIGNAL DANS DU BRUIT LAPLACIEN

Wald[13,25] a montré que le test séquentiel du rapport de vraisemblance a la durée espérée la plus courte parmi tous les tests où les probabilités conditionnelles d'erreur restent dans des limites prescrites dans le cas d'échantillons indépendants et identiquement répartis de bruit pour la présence d'un signal constant. On considère certaines propriétés des tests d'un signal non-constant dans un bruit coloré.

4.1 Des Signaux Généraux dans du Bruit Indépendant - Cas Discret

Nous considérons le test de la suite de fonctions aléatoires $\{x_j\}$ pour la présence d'une suite non-constante de signaux $\{s_j\}$. En employant la notation vectorielle du Chapitre 3, les hypothèses alternatives sont*

$$H_o) \quad X(i) = N(i)$$

$$H_1) \quad X(i) = N(i) + S(i). \tag{1}$$

On suppose la convergence en moyenne quadratique des composantes du vecteur connu S(i), et que la somme:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} s_j^2 = m, \quad 0 < m < \infty$$

ne soit pas nulle. Les composantes n_j de bruit ont moyenne nulle et écart moyen égal à un.

*A partir d'ici on omet les flèches des vecteurs.

i. On applique directement la démonstration due à Wald (voir [13], A.1 ou [27], problème 3.34) pour montrer que le test devra terminer presque surement. Il faut montrer qu'une des x_j dépasse log A - log B en valeur absolue pour n'importe quel j. Pour tout j, définissons

$$p_j \equiv \text{prob}\,(|x_j| > \log A - \log B) > 0 .$$

En mettant c = log A - log B, on a

$$\begin{aligned}
(1-p_j) &= \int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx\, e^{-\frac{(x-s_j)^2}{2}} \\
&\le 2\int_{o}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx\, e^{-\frac{(x-|s_j|)^2}{2}} \\
&\le 2\int_{o}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx\, e^{-\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{2}} \\
&= 2\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\le 2\left[1-e^{-\frac{c^2}{2\pi}}\right]^{\frac{1}{2}} . \quad \text{(voir [28]}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} (1-p_j) \le \lim_{k\to\infty} 2\left[1-e^{-\frac{c^2}{2\pi}}\right]^{\frac{k}{2}} = 0,$$

et le test finira presque surement.

ii. On montre que la condition Cesàro (0,2) sur la suite $\{s_j\}$ entraîne

que la durée espérée du test est finie. En écrivant

$$z_j = \log \frac{\text{Prob}\,(x_j = s_j+n_j)}{\text{Prob}\,(x_j = n_j)} \quad ,$$

le test finit lorsque $Z_N = \sum_{j=1}^{N} z_j \geq \log A$ ou $Z_N = \sum_{j=1}^{N} z_j \leq \log B$. Prenons comme negligible l'excès de Z_N sur les seuils log A et log B. Sous cette restriction, en présence de signal

$$0 < E\, Z_N = (1-\beta) \log A + \beta \log B < \infty \quad , \tag{2}$$

tandis qu'en absence de signal

$$-\infty < E\, Z_N = \alpha \log A + (1-\alpha) \log B < 0. \tag{3}$$

(Visiblement (2) > 0 et (3) < 0: on met α, $\beta < 1/2$, et on trouve que $A = (1-\beta)/\alpha$, $B = \beta/(1-\alpha)$, toujours en mettant $Z_N = \log A$ ou $Z_N = \log B$. (Voir [13], § 3.2.)

On a montré au Chapitre 3 qu'en présence de signal

$$E\, z_j = + \frac{s_i^2}{2} \quad ,$$

et en absence de signal

$$E\, z_j = - \frac{s_i^2}{2} \quad .$$

A partir d'ici, notre démonstration est analogue à celle de Lehmann (voir [27], problème 3.37):

$$E\, Z_N = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P\left\{N=n\right\} \sum_{i=1}^{n} E(z_i \,|N=n) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} P\{N=n\}\ E(z_i | N=n)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)\ E(z_i | N \geq i)\ .$$

L'événement que $N < i$ ne dépend que de Z_j, $j < i$; il est indépendant de z_i. Donc l'événement complémentaire $N \geq i$ est indépendant de z_i, et $E(z_i | N \geq i) = E(z_i)$. Puis on a

$$E\ Z_N = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)\ E\ z_i$$

$$|E\ Z_N| = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)\ \frac{s_i^2}{2}\ .$$

$$|E\ Z_n| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P(N=j)\ \frac{s_i^2}{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) \sum_{i=1}^{j} \frac{s_i^2}{2}\ .$$

Désignons

$$\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{s_i^2}{2} \equiv C_j ,$$

et écrivons

$$|E\ Z_N| = \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j)jC_j .$$

Si $s_1^2 > 0$, C_j est toujours positif. Si $s_1 = 0$, on peut changer les indices et commencer à numéroter au premier indice n pour lequel $s_n^2 > 0$. Donc $C_j > 0$ pour tout $j \geq n$. Par hypothèse, $\lim_{j\to\infty} C_j = m > 0$. Par conséquent, il existe un $\gamma > 0$ tel que $C_j \geq \gamma$ pour tout $j \geq n$ (voir [29], th. 41.3). Puis

$$|E\ Z_N| \geq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} j\ P(N=j) = \gamma E(N). \qquad (4)$$

On déduit que E(N) est bornée, donc finie. Remarquons que la démonstration ne dépend que de la condition que $\{x_i\}$ converge en moyenne quadratique, et que le test finisse presque sûrement. En autre on n'a pas utilisé la loi laplacienne de $\{x_j\}$, et par conséquent la démonstration est valable pour de plus générales fonctions aléatoires à distribution non-identiques.

iii. En considérant la démonstration d'après Lehmann de l'optimalité du test séquentiel à seuils constants, on trouve que l'hypothèse de la constance du signal est indispensable. On n'arrive pas à décrire exactement le test optimum pour un signal variable.

4.2 Signal dans du Bruit Dépendant

Dans cette partie nous considérons le test d'une suite de fonctions aléatoires dépendantes $\{x_j\}$ pour la présence d'une suite non-constante de signaux $\{s_j\}$. Les deux hypothèses à tester sont

$$\begin{aligned} H_o)\quad & X(i) = N(i) \\ H_1)\quad & X(i) = N(i) + S(i) \,. \end{aligned} \tag{1}$$

La matrice i x i de covariance du vecteur N(i) du bruit s'écrit $\psi(i)$, comportant des éléments $r_{nj} = r_{jn}$. On ne présume pas le cas stationnaire: en général $r_{nj} \neq r_{n+k,\ j+k}$. Si le déterminant de ψ est nul, au moins une composante de N(i) peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres composantes du vecteur. Dans ce sens-ci le processus de bruit est singulier, cas que nous voulons exclure. En présumant que le déterminant ne soit pas nul, la matrice inverse ψ^{-1} existe.

ψ étant symétrique, ψ^{-1} l'est aussi. Par conséquent elle peut se décomposer en produit d'une matrice triangulaire inférieure H et la transposée H' ([30], p. 33 et seq). $HH' = \psi^{-1}$, et donc $H^{-1}\psi^{-1}(H')^{-1} = I$, où I est la matrice unitaire.

En appliquant la transformation linéaire H aux équations (1), on a

$$\begin{aligned} H_o)\quad & HX(i) = HN(i) \\ H_1)\quad & HX(i) = H(N(i) + S(i)) \\ & \qquad = HN(i) + HS(i) \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Écrivons Y(i) = HX(i), T(i) = HS(i), et M(i) = HN(i). La matrice de covariance de M(i) est $H\psi H' = I$*, et donc $Em_j = 0$, $Em_j m_k = \delta_{jk}$.

*Voir [26], équation 26.6.2 .

Le test équivalent consiste à essayer la suite de fonctions aléatoires indépendantes $\{y_j\}$ pour la présence de la suite connue $\{t_j\}$ de signaux. Si $0 < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} z_j^2 < \infty$, l'espérance de la durée du test de Wald est finie (voir le Chapitre 4.1). Remarquons que la transformation Y = HX peut se réaliser, car la valeur de l'observée nouvelle y à l'époque j ne dépend que des valeurs passées de la suite $\{x\}$: $y_j = \sum_{k=1}^{j} h_{jk} x_k$. Le rapport de vraisemblance (1) est identique à celui de (2), ce qu'on peut voir soit par définition soit par un calcul simple.

i. Par définition:

$$L(Y(i)) = \frac{\text{Prob } (Y(i) = T(i) + M(i))}{\text{Prob } (Y(i) = M(i))}$$

$$= \frac{\text{Prob } (X(i) = S(i) + N(i))}{\text{Prob } (X(i) = N(i))}$$

$$= L(X(i)). \qquad (3)$$

ii. Par calcul, $P(X(i) = S(i) + N(i))$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^i |\psi|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[X(i)-S(i)\right]' \psi^{-1} \left[X(i)-S(i)\right] \right\} . \qquad (4)$$

$$P(X(i) = N(i)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^i |\psi|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} X(i)' \psi^{-1} X(i) \right\} . \qquad (5)$$

$$L(X(i)) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} S(i)' \psi^{-1} S(i) + S(i)' \psi^{-1} X(i) \right\} . \qquad (6)$$

Par analogie,

$$L(Y(i)) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} (HS)' IHS + (HS)' IHX \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2} S'H'IHS + S'H'IHX \right\}$$

$$= L(X(i)) \ . \qquad (7)$$

La démonstration dépend de l'existence de la transformation réalisable H(i) du processus X(i) en le processus Y(i) de fonctions aléatoires sans corrélation. Une telle transformation existe pour i fini et quelque soit la matrice ψ non-singulière de covariance, mais les fonction résultantes $\{y_j\}$ ne doivent pas être indépendantes à moins qu'elles soient laplaciennes.

Dans le cas où les observées sont laplaciennes, le détecteur doit composer le rapport de vraisemblance (1). L'opération essentielle détruisant de l'information est la composition de $X(i)\psi^{-1}S(i)$. La matrice de covariance ψ et le signal attendu S(i) sont tous les deux connus - donc on peut enrégistrer $\psi^{-1}S(i)$ avant le début du test. Le détecteur prend la corrélation

$$z(i) = X(i)'\psi^{-1}S(i) = \sum_{k=1}^{i} x_k \sum_{j=1}^{k} r_{kj}^{-1} s_j \ ,$$

où r_{kj}^{-1} sont les eléments de la matrice inverse $\psi^{-1}(i)$. Il s'agit alors d'un simple étalonnage à composer

$$L(i) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} S'(i)\psi^{-1}S(i) + z(i) \right\} \ . \qquad (8)$$

4.3 Cas Permanent, Bruit Blanc

Les hypothèses à tester sont

$$H_o) \quad x(t,\tau) = n(t,\tau)$$

$$H_1) \quad x(t,\tau) = s(t,\tau) + n(t,\tau) \ . \qquad (1)$$

Pour l'instant on prend n(t) comme du bruit blanc à moyenne nulle et à densité spectrale uniforme N_o watts/hertz, et

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T s^2(t)dt = m > 0.$$

Le problème posé n'est pas encore admissible, parce que $En(t)^2$ est infinie dans notre modèle. Un problème admissible est le test du vecteur X(i) ($i\Delta t = \tau$) pour les hypothèses suivantes - puis on prend la limite lorsque Δt tend vers zéro.

$$H_o') \quad X(i) = N(i)$$

$$H_1') \quad X(i) = N(i) + S(i) .$$

Le vecteur X(i) consiste dans les composantes

$$x_j = \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} x(t)dt, \qquad 1 \le j \le \infty \quad .^* \qquad (2)$$

Par analogie, les composantes de S(i) sont

$$s_j = \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} s(t)dt.$$

Les n_j sont des accroissements d'un processus Wiener-Lévy $\gamma(t)$ - le processus n(t) peut se considérer comme la "dérivée" d'un processus W-L. Dans un

---

*Ces définitions de x_j, s_j et n_j seront employées dans tout le chapitre. On ne désigne pas ici par x_j le coefficient du développement K-L de $x(t,\tau)$.

tel processus,

$$< \gamma(t) > = 0$$

$E\Big[\gamma(t)-\gamma(u)\Big]\Big[\gamma(w)-\gamma(v)\Big] = 0$, si (t,u) et (w,v) sont des intervalles disjoints.

$$[\gamma(t) - \gamma(u)]^2 = N_o|(t-u)| \ , \tag{3}$$

n_j est laplacienne, et il résulte de (3) que

$$< n_j > = 0$$

$$< n_j n_k > = \delta_{jk} N_o \Delta t \ . \tag{4}$$

Par conséquent, les n_j sont laplaciennes, stationnaires et indépendantes l'une de l'autre pour tout Δt.

Définissons

$$z_j \equiv \log \frac{\text{Prob } (x_j = s_j + n_j)}{\text{Prob } (x_j = n_j)}$$

$$= \left(- \frac{s_j^2}{2 N_o \Delta t} + \frac{s_j x_j}{N_o \Delta t} \right) \ . \tag{5}$$

$< z_j > = \pm \dfrac{s_j^2}{2 N_o \Delta t}$, où le signe dépend de la présence de signal.

En mettant $Z_i = \sum_{j=1}^{i} z_j$, le test finit lorsque $Z_N \geq \log A$ ou $Z_N \leq \log B$.

$E(Z_N) = E\left(\sum_{j=1}^{N} z_j \right)$. Si on prend $\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} <z_j>$ comme finie et supérieure à zéro, donc $E(N)$ est finie (voir 4.1). En effet,

$$E(N) \leq \frac{|E(Z_N)|}{\min_i \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \frac{s_j^2}{2 N_o \Delta t} \right)} \ . \tag{6}$$

Considérons

$$s_j^2 = \left[\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} s(t)dt \right]^2 = (\Delta t)^2 \, s^2(\xi_j), \tag{7}$$

où $(j-1)\Delta t < \xi_j < j\Delta t$.

$$\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} |< z_j >| = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \frac{(\Delta t)^2 \, s^2(\xi_j)}{2 \, N_o \Delta t} . \tag{8}$$

Si on écrit $T = N\Delta t$, (6) et (8) donnent

$$E(T) = \Delta t \, E(N) \leq \frac{|E \, Z_N|}{\min_i \frac{1}{i\Delta t} \sum_{j=1}^{i} \frac{\Delta t \, s^2(\xi_j)}{2 \, N_o}} . \tag{9}$$

Le processus Wiener-Lévy est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que $En_j n_k = \delta_{jk}$, même lorsque Δt tend vers zéro. (9) est valable pourvu que les $\{x_j\}$ soient indépendantes, et donc

$$\lim_{\Delta t \to 0} E(T) \leq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|E \, Z_N|}{\min_i \frac{1}{i\Delta t} \sum_{j=1}^{i} \frac{\Delta t \, s^2(\xi_j)}{2 \, N_o}}$$

$$= \frac{|E \, (Z_N)|}{\min_\tau \frac{1}{\tau} \int_o^\tau dt \, \frac{s^2(t)}{2 \, N_o}} , \quad \tau > 0 . \tag{10}$$

E(T) est finie à condition que

$$\min_\tau \frac{1}{\tau} \int_o^\tau dt s^2(t) = m > 0 .$$

Mais si $\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt s^2(t) = \varepsilon > 0$, et $\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt s^2(t) = m > 0$, il est aisé de voir qu'il existe un $\gamma > 0$ tel que $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt s^2(t) \geq \gamma$ pour tout $\tau \in [0,\infty]$. Donc une condition suffisante pour que $E(T) < \infty$ est que $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt s^2(t) \geq \gamma > 0$ pour tout τ positif.

4.4 Cas Permanent, Bruit "Coloré"

Soit $n(t)$ un processus stationnaire régulier avec moyenne nulle et densité spectrale $N(\omega)$. $N(0) \equiv N_o$. Étant donnée une courbe $x(t)$ et le signal possible étant la fonction certaine $s(t)$, il s'agit de décider entre les deux hypothèses

$$H_o) \quad x(t) = n(t)$$

$$H_1) \quad x(t) = n(t) + s(t). \qquad (1)$$

En peu de mots, on démontrera l'existence d'un opérateur linéaire $H(t,u)$, possédant certaines propriétés d'être physiquement réalisable, qui transformera le test cité en un test équivalent pour la présence du signal transformé dans du bruit à densité spectrale constante. Le test séquentiel optimum (au sens de Wald) pour la présence d'un signal constant connu dans du bruit blanc est le test séquentiel du rapport de vraisemblance avec des seuils constants (voir 4.3). Il en résultera qu'il faudra composer, de quelque façon, le rapport de vraisemblance, et il faudra le comparer séquentiellement à des seuils. L'opérateur linéaire doit posséder deux propriétés additionelles (voir [24], sec. 0.6):

i. Il doit être invariant sous les translations sur l'axe temporel:

$$H(u,t+\tau)\, f(t+\tau) = H(u,t)\, f(t).$$

ii. Il doit être indépendant de l'avenir de la fonction à transformer, c'est-à-dire

$$g(u) = H(u,t)\, f(t) \quad -\infty \le t \le \infty$$

doit être identique à

$$g(u) = H(u,t)\, f(t) \quad -\infty \le t \le u \,. \tag{2}$$

Ayant pris le filtre comme temps-invariant, une condition nécessaire et suffisante pour que (ii) soit satisfaite est la condition plus simple suivante: si $f(t) = 0$ pour tout $t < t_1$, $g(u) = H(u,t)f(t) = 0$ pour tout $u < t_1$.

Un processus est singulier si on peut en prévoir l'avenir presque sûrement en connaissant complètement son passé. Le spectre $\Theta(\omega)$ d'un processus régulier (= non-singulier) satisfait à la condition*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|\Theta(\omega)||\, d\omega}{1+\omega^2} < \infty \,. \tag{3}$$

Si $\Theta(\omega)$ satisfait à (3), donc $\frac{1}{\Theta(\omega)}$ y satisfait aussi, parce que

$$\left|\log\left|\frac{1}{\Theta(\omega)}\right|\right| = |\log|\Theta(\omega)|| \,.$$

Par conséquent, $\frac{1}{\Theta(\omega)}$ est le spectre d'un processus régulier si $\Theta(\omega)$ l'est.

---

*Voir [24], sec 2.5 ou le chapitre 6 de la thèse actuelle.

En particulier, $N(\omega)$ satisfait à (3) par hypothèse, et $\Phi(\omega) = \frac{1}{N(\omega)}$ y satisfait aussi.

Toute fonction spectrale satisfaisant à (3) peut se décomposer en facteurs sous la forme

$$\Theta(\omega) = \theta(\omega)\theta'(\omega) , \qquad (4)$$

tel que $\theta(\omega)$ ne possède ni singularités ni zéros à partie imaginaire négative, et $\theta'(\omega)$ n'en possède pas à partie imaginaire positive.*

Soit $g(u)$ la transformée de Fourier inverse de $G(\omega) = \theta(\omega)F(\omega)$. Pour toute fonction de temps $f(t)$ disparaissant pour tout $t < 0$ et possédant une transformée de Fourier $F(\omega)$, la fonction correspondante $g(u)$ disparaît pour tout $u < 0$. Ceci est vrai parce que $\theta(\omega)$ n'a pas de singularité à partie imaginaire négative. $\theta(\omega)$ correspond à un opérateur linéaire $J(u,t)$ remplissant la condition (ii) dans le domaine temporal. En outre, $J(u,t)$ satisfait à la condition (i), parce qu'il correspond à un opérateur multiplicatif, indépendant de toute variable temporale, dans le domaine de fréquence. Donc, pour tout $\Theta(\omega)$ satisfaisant à (4), il existe un opérateur $J(u,t)$ qui satisfait à (i) et (ii). Remarquer qu'on n'a pas supposé que $\theta(\omega)$ même corresponde à une fonction de temps. En général il n'existe pas de telle correspondance, mais si $\theta(\omega)$ possède la transformée de Fourier inverse $h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\theta(\omega)$ (c'est-à-dire que $\theta(\omega)\varepsilon L_2(0,\infty)$), l'opérateur $H(u,t)$ se ramène à l'opérateur de convolution:

$$\int_{-\infty}^{u} h(u-t)[\ ]\, dt.$$

---

*Voir [24], sec 1.7.

En général, H(u,t) comporte des dérivations. Bode et Shannon[31] ont présumé implicitement l'existence d'un tel opérateur sans avoir spécifié la condition que le bruit fût régulier.

Ayant démontré l'existence de l'opérateur linéaire H(u,t) possédant la propriété d'être réalisable (ii), on peut remplacer le test (1) par le test équivalent suivant:

$$H_0'): \quad y(u) = m(u)$$
$$H_1'): \quad y(u) = m(u) + v(u)$$

où

$$y(u) = H(u,t)x(t)$$
$$m(u) = H(u,t)n(t)$$
$$v(u) = H(u,t)s(t) \qquad (5)$$

Les tests (1) et (5) sont équivalents, donc les probabilités respectives d'erreur sont identiques. Par conséquent, le test optimum pour un signal constant connu dans du bruit laplacien stationnaire régulier est le test de vraisemblance avec des seuils constants. Si par erreur on choisit en pratique un modèle qui produit un processus singulier de bruit, la détection parfaite en résulte, et nos méthodes (qui sont fondées sur la loi de Bayes) ne sont pas nécessaires (voir le chapitre 6 pour une discussion de la détection singulière).

Il y a une différence importante entre la matrice H et l'opérateur H(u,t). Dans le cas discret il faut opérer uniquement sur l'histoire récente

du processus - c'est-à-dire qu'il ne faut connaître que les valeurs du processus à partir de l'intervalle d'observation. Mais dans le cas permanent, l'opérateur H(u,t) agit sur le passé entier du processus. Le rendement de l'opération H(u,t)n(t) doit se composer dans tout le temps, mais la détection commence lors du début du signal. S'il s'agit de bruit à spectre rationnel, le processus transformé y(u) comprend x(u) et ses dérivées $x^{(j)}(u)$, toutes multipliées par des facteurs constants dans le temps. (Dans ce cas, le passé récent de x(t) suffit à composer y(u).) Les dérivées d'un signal constant sont nulles; donc le signal équivalent dans le bruit blanc est constant aussi. La grandeur du signal équivalent est différente de celle du signal original ($|v(u)|<|s(u)|$ en général), et la corrélation du bruit revient à une perte effective de puissance.

Chapitre 5

CONTINUITÉ DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE SI LE SPECTRE EST RATIONNEL

Dans ce chapitre on suppose un processus stationnaire de bruit à spectre rationnel, c'est-à-dire à covariance

$$\psi(\tau) = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega \, \frac{\prod_{i=1}^{n} (\omega^2+\omega_i^2)}{\prod_{j=1}^{m} (\omega^2+\omega_j^2)} , \quad m-n = 2k > 0. \tag{1}$$

k-1 dérivées de presques toutes les réalisations du processus existent et sont absolument continues (voir [32], XI- §9), puisque le processus est séparable et stationnaire. Remarquons d'abord que le signal doit posséder au moins autant de dérivées que le bruit pour que soit évité le cas singulier.

S'il n'existait que j dérivées continues du signal ($j < k-1$) à l'époque ρ, la détection singulière serait possible dans un intervalle fini, puisqu'on pourrait effectuer le test suivant:

Dérivons la courbe observée j+1 fois, et testons la courbe dérivée pour la présence de signal. La puissance de bruit dans la courbe dérivée est finie, puisque le processus original permet presque surement j+1 dérivations en moyenne quadratique. Mais à l'époque ρ, le signal attendu serait infini. Comparons le rapport de vraisemblance à l'époque ρ avec un seuil arbitrairement grand. La probabilité de faux rejet est nulle, tandis que la probabilité de fausse alerte est arbitrairement petite.

Si on suppose que le signal possède k-1 dérivées partout, mais que la (k-1)'ième soit discontinue, la courbe observée expose des discontinuités en présence de signal, tandis que la courbe de bruit pur est presque sûrement continue.

Cette discussion est très heuristique, mais elle sert à expliquer la supposition qu'on va faire; à savoir: que les signaux admissibles possèdent au moins k-1 dérivées continues, s'il s'agit d'un bruit décrit par (1). On discute plus profondement la détection singulière au Chapitre 6.

On a démontré au Chapitre 2 la proposition suivante: s'il existe une fonction généralisée (comprenant des δ-fonctions au sens de Dirac) satisfaisant à

$$s(t) = \int_0^\tau F(u,\tau)\psi(t-u)du,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 = \int_0^\tau F(t,\tau)s(t)dt. \qquad (2)$$

$\psi(t-u)$ étant donnée par (1), la fonction généralisée $F(t,\tau)$ peut s'écrire sous la forme [22,23] justifiée au paragraphe 2.2:

$$F(t,\tau) = f(t,\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i\, \delta^{(i)}(t) + b_i\, \delta^{(i)}(\tau-t)). \qquad (3)$$

Donc le logarithme du rapport de vraisemblance est

$$Z(\tau) = \int_0^\tau dt\, F(t,\tau)\left[\frac{-s(t)}{2} + x(t)\right]$$

$$= \int_0^\tau f(t,\tau)dt\left[x(t) - \frac{s(t)}{2}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(a_i s^{(i)}(0)+b_i s^{(i)}(\tau)\right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1}\left(a_i x^{(i)}(0)+b_i x^{(i)}(\tau)\right). \qquad (4)$$

Supposons pour l'instant un signal connu exactement (puis on considérera le problème d'estimation). En absence de signal, $x(t) = n(t)$. $n(t)$ avec ses k-1 dérivées est continue presque surement. En présence de signal, $x(t) = n(t) + s(t)$. Au cas régulier, le signal avec ses k-1 dérivées aussi est continue partout. Donc $x(t)$ est continue dans tous les deux cas exhaustifs. b_1 est proportionnel à $s^{(i)}(\tau)$, et a_i et $f(t)$ sont indépendants de τ. Le membre droit de l'équation (4) comporte une intégrale finie et deux sommes de fonctions continues - donc $Z(\tau)$ est presque sûrement continu.

Considérons ensuite la continuité du maximum de vraisemblance lorsqu'il y a un nombre fini de paramètres à estimer. Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ (n fini) les paramètres à estimer. Pour chaque ensemble de valeurs des $\{\pi\}$, $Z(\tau,\pi)$ est continu en τ, car on peut appliquer le raisonnement ci-dessus.
On démontre le théorème suivant à propos du maximum de Z:

Théorème: Soit $Z(\tau,\pi)$ une fonction réelle possédant les propriétés suivantes:

(i) $Z(\tau,\pi)$ est défini sur le rectangle TxP, P étant un intervalle fermé fini mais T n'étant pas précisé.

(ii) $Z(\tau,\pi)$ est fonction continue des deux variables τ et π définies sur TxP.

Donc $\underset{\pi\epsilon P}{\text{Max}}\, Z(\tau,\pi)$ est continu en τ pour tout $\tau\epsilon T$.

Preuve: $Z(\tau,\pi)$ étant continu en π sur un intervalle fermé, pour toute valeur de τ, $\underset{\pi\epsilon P}{\max}\, Z(\tau,\pi) \equiv m(\tau)$ existe et est borné. Donc $\overline{\lim}_{\tau\to\tau_o} \equiv M(o)$ existe. Soit $\{\tau_n\}$ une suite telle que $\lim_{\tau\to\tau_o} m(\tau_n) = M(o)$, et soit $\{\pi_n\}$ une suite correspondante telle que $m(\tau_n) = Z(\tau_n,\pi_n)$. De cette façon on a défini une suite de couples $\{\tau_n,\pi_n\}$. En général, la suite $\{\pi_n\}$ ne doit pas tendre vers une

limite, mais, puisque P est fermé et borné (et donc compact), on peut choisir une sous-suite $\{\tau_m,\pi_m\}$ de couples telle que $\pi_m \to \pi_r \epsilon P$ lorsque $\tau_m \to \tau_o$. Donc, $M(o) = \lim_{\tau_m \to \tau_o} Z(\tau_m,\pi_m) = Z(\tau_o,\pi_r)$ puisque Z est continu en les deux variables τ et π. Par définition, $Z(\tau_o,\pi_r) \leq m(\tau_o)$, et donc $m(\tau_o) \geq M(o)$.

Considérons ensuite $\underline{\lim}_{\tau \to \tau_o} m(\tau)$. Soit τ_ℓ une suite telle que $\lim_{\tau_\ell \to \tau} m(\tau) = L(o)$. Ceci veut dire qu'il existe un ℓ_o tel que

$$m(\tau_\ell) - L(o) < \frac{\epsilon}{2} , \quad \ell > \ell_o. \tag{5}$$

En écrivant $m(\tau_o) = Z(\tau_o,\pi_o)$, il existe un ℓ_1 tel que

$$Z(\tau_o,\pi_o) - Z(\tau_\ell,\pi_o) \equiv m(\tau_o) - Z(\tau_\ell,\pi_o) < \frac{\epsilon}{2} . \tag{6}$$

$Z(\tau_\ell,\pi_\ell) = m(\tau_\ell) \geq Z(\tau_\ell,\pi_o)$, et donc il résulte de (6) que

$$m(\tau_o) - m(\tau_\ell) < \frac{\epsilon}{2} . \tag{7}$$

Soit $\ell_2 = \max(\ell_o,\ell_1)$. Pour tout $\ell > \ell_2$, (5) et (7) se satisfont simultanément. Donc la somme satisfait à

$$m(\tau_o) - L(o) < \epsilon \tag{8}$$

pour ϵ arbitrairement petit. Donc $L(o) \geq m(\tau_o)$. Puisque la limite inférieure ne peut pas dépasser la limite supérieure, on a $\lim_{\tau \to \tau_o} m(\tau) = m(\tau_o)$. On conclut que $\max Z(\tau,\pi)$ est continu à tous les points $\tau_o \epsilon T$.

La prochaine question concerne les conditions telles que la valeur $m(\tau)$

rendant maximum le rapport de vraisemblance soit fonction continue de temps. Sans entrer dans le détail $\hat{\pi}(\tau)$ doit être une fonction continue des observées $\{x_i(\tau)\}$ pour qu'il soit continu en τ.

Les $\{x_i(\tau)\}$ sont définées par l'équation

$$x_i(\tau) = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(\tau)}} x(t)\phi_i(t,\tau)dt.$$

On a montré au paragraphe 2.1 que $\phi_i(t,\tau)$ et $\lambda_i(\tau)$ sont continues en τ. On a vu que $x(t)$ est presque sûrement continu. Par conséquent, $x_i(\tau)$ est continue en τ. Donc, si l'estimée du paramètre est une fonction continue des $\{x_i(\tau)\}$, celles-ci étant continues il en résulte que l'estimée est continue. En particulier, si l'estimée d'un paramètre est fonction linéaire des données observées, elle doit être continue par rapport à τ.

Évidemment l'estimée rendant maximum le rapport de vraisemblance n'est pas continue si le paramètre π est discret, ou si le signal est lié au paramètre par une transformation multiple (par exemple, la partie constante de l'argument de la fonction $\exp [i(\omega t + \theta)]$). Pourtant, de nombreux paramètres sont estimés par des opérations linéaires sur les données observées: la grandeur d'un signal.

Considérons un exemple fondé sur le travail de Swerling[33]. Dans un supplément à sa communication, il discute l'estimateur à variance minimum $\tilde{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_i x_i$ d'un paramètre q.

Pour n'importe quel estimateur $\hat{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$

$$E\left[(\hat{q}-q)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 + E\left[q^2\right] - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i E\left[q x_i\right] . \qquad (9)$$

Donc, l'estimateur rendant minimum la variance est

$$\tilde{q}(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i E\left[q x_i\right]$$

$$= \int_0^{\tau} x(t) F(u,\tau,q)\,dt . \qquad (10)$$

Évidemment $\tilde{q}(\tau)$ est continu en τ, puisque le noyau à droite est continu en τ et en t pour toute vraie valeur constante q. Dans le cas de bruit laplacien, l'estimateur à maximum de vraisemblance et celui à minimum de variance sont identiques, donc l'estimateur rendant maximum le rapport de vraisemblance est continu.

Chapitre 6

SINGULARITÉ DE DÉTECTION

La détection est dite singulière si la présence ou l'absence de signal dans le bruit peut se déterminer avec des probabilités d'erreur arbitrairement petites. On prend comme cas singulier le cas où une détection parfaite s'accomplit après une observation infinie.

On peut distinguer trois genres de détection singulière:

I. La détection est singulière même après une observation arbitrairement courte. C'est le cas, par exemple, si toutes les dérivées du processus de bruit existent, ou si le rapport de signal-à-bruit est infini dans une bande de fréquences.

II. La détection est régulière sur l'intervalle d'observation $(0,T_1)$, mais elle est singulière sur l'intervalle $(0,T_2)$, où T_2 est fini mais plus grand que T_1.

III. La détection est finie sur tout intervalle fini, mais elle devient arbitrairement bonne lorsque la longueur de l'intervalle tend vers l'infini. C'est le cas s'il s'agit d'un signal régulier qui n'appartient pas à $L_2(0,\infty)$: une sinusoïde ou une constante, par exemple.

Dans le cas d'un processus permanent le rapport de vraisemblance est

$$L(x,\tau) = \lim_{N\to\infty} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} - \left(\frac{s_i^2(\tau)}{2} - s_i(\tau)x_i(\tau)\right)\right]. \qquad (1)$$

Le test séquentiel consiste à comparer ce rapport à deux seuils A et B, ou ce qui est équivalent, à comparer

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{\sum_{i=1}^{N} -\frac{s_i^2(\tau)}{2} + s_i(\tau)x_i(\tau)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)}} \qquad (2)$$

aux seuils

$$a = \lim_{N\to\infty} \frac{\log A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)}} \; ; \quad b = \lim_{N\to\infty} \frac{\log B}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)}} \; .$$

L'espérance de la fonction aléatoire (2) est $\pm \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)}$ (le signe positif correspondant à la présence de signal); la variance de (2) est égale à un. Si la série $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)$ diverge pour une valeur donnée de τ, visiblement les probabilités conditionelles d'erreur α et β peuvent se réduire arbitrairement.* Si on compare

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{s_i^2(\tau)}{2} + s_i(\tau)x_i(\tau)\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)}}$$

à a et b ($b<0$), et N se prend assez grand, l'un ou l'autre des seuils sera dépassé, et log A et $\log \frac{1}{B}$ sont tres grands aussi. Puisque $\alpha = \frac{1-B}{A-B}$ et $\beta = \frac{B(A-1)}{A-B}$, α et β deviennent arbitrairement petites lorsque A et $\frac{1}{B}$ deviennent tres grands.

---

*Grenander(3) démontre cette proposition en montrant que le rapport tend vers $\pm$ infini, le signe dépendant de la présence de signal.

Kelly, Reed et Root ([4], Appendix I) démontrent que

$$\lim_{\tau\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G(\omega)}\, d\omega, \qquad (3)$$

où $S(\omega)$ est la transformée de Fourier de $s(t)$, et $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(\tau)\, e^{-i\omega\tau}$ est le spectre du bruit. En plus, la limite est approchée d'une manière monotone non-décroissante lorsque $\tau \to \infty$. On peut considérer cette équation au sens suivant: si $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)$ existe pour tout τ, $0 \le \tau \le \infty$, l'intégrale à droite existe. Si $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)$ est infinie pour une valeur τ_o de τ, elle est infinie pour tout $\tau > \tau_o$ et l'intégrale à droite diverge. Donc, la convergence de l'intégrale à droite assure la convergence de la serie $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)$ pour tout τ, fini ou infini, mais la réciproque n'est pas vraie.

Une expression alternative de la somme $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$ est très utile à l'étude de la détection singulière:

Écrivons

$$\begin{aligned} y(t) &= h(u,t)x(u) \\ v(t) &= h(u,t)s(u) \\ m(t) &= h(u,t)n(u)\ . \end{aligned} \qquad (4)$$

Le processus de bruit $n(t)$ étant régulier, il existe un opérateur réalisable $h(u,t)$ ($i.e.$, $h(u,t) = 0$ pour $u > t$) tel que $m(t)$ est un bruit blanc

(voir 4.4). Puisque l'opérateur est linéaire et indépendant de l'avenir de la fonction à transformer, on a

$$\text{Prob}[x(t,\tau) = n(t,\tau)] = \text{Prob}[y(t,\tau) = m(t,\tau)]$$
$$\text{Prob}[x(t,\tau) = n(t,\tau) + s(t,\tau)] = \text{Prob}[y(t,\tau) = m(t,\tau) + v(t,\tau)] \quad . \qquad (5)$$

En composant le rapport de vraisemblance,

$$L(x(t,\tau)) = \frac{\text{Prob}[x(t,\tau) = n(t,\tau) + s(t,\tau)]}{\text{Prob}[x(t,\tau) = n(t,\tau)]}$$

$$= \frac{\text{Prob}[y(t,\tau) = m(t,\tau) + v(t,\tau)]}{\text{Prob}[y(t,\tau) = m(t,\tau)]}$$

$$= L(y(t,\tau)). \qquad (6)$$

En développant $y(t)$, $m(t)$ et $v(t)$ par les fonctions propres de la covariance du processus $m(t)$, on a

$$L(y(t,\tau)) = \exp\left\{ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i^2(\tau)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\tau) y_i(\tau) \right\} = L(x(t,\tau)) \qquad (7)$$

où

$$v_i(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{v(t)\phi_i'(\tau)}{\sqrt{\lambda_i'(\tau)}}\, dt$$

et

$$N_o \int_0^{\tau} \delta(t-u)\phi_i'(t)dt = \lambda_i'\phi_i'(u) \quad .$$

$N_o\delta(t-u)$, la delta-fonction, est la covariance du bruit blanc, et toutes les valeurs propres sont identiques et égales à N_o.

Puisque les deux fonctions aléatoires de (6) sont identiques, on a en particulier

$$E\ Z(y(t,\tau)) = \pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i^2(\tau)}{2} = \pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^2(\tau)}{2} = E\ Z(x(t,\tau))$$

$$\text{Var } Z(y(t,\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \text{Var } Z(x(t,\tau)) \ . \qquad (8)$$

Donc on conclut que

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) \ , \qquad (9)$$

et on peut étudier le membre gauche au lieu du droit.

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left[\int_0^{\tau} v(t)\phi_i'(t)dt\right]^2}{N_0}$$

$$= \int_0^{\tau} v(t)dt \int_0^{\tau} v(u)du \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i'(t)\phi_i'(u)}{N_0}$$

$$= \int_0^{\tau} v(t)dt \int_0^{\tau} v(u)du \frac{\delta(t-u)}{N_0}$$

$$= \int_0^{\tau} v(t)^2 \frac{dt}{N_0} \ . \qquad (10)$$

6.1 Étude des Singularités du Genre I

$$\lim_{\tau\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(\tau) = \lim_{\tau\to 0} \int_0^\tau dt \left[\int_0^\tau n(t,u)s(u)du \right]^2$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \int_0^\tau dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H(\omega)S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \right]^2$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\omega)S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \right]^2 , \qquad (11)$$

par le théorème d'Abel, si l'intégrale converge. Visiblement la somme ne peut être infinie à moins que $h(0,0)s(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \right]^2$ soit infini. Cet événement peut survenir de deux manières:

1. Puisque $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{G(\omega)}$, l'intégrale diverge lorsque $\tau \to 0$ si $G(\omega)$ tend vers zéro dans une bande de fréquences occupée par $S(\omega)$.

2. L'intégrale (11) peut diverger à cause du comportement de $H(\omega)S(\omega)$ lorsque $\omega \to \infty$. $\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(\tau)$ diverge si $s(0)$ possède moins de dérivées que $n(t)$, parce qu'en général $h(0,0)s(0)$ comporte autant de dérivations de $s(t)$ que le processus $n(t)$ en permet.*

(Comme cas spécial de (2), la somme diverge si $s(0)$ est infini.)

6.2 Étude des Singularités du Genre II.

Il est évident (expression (11)), et il est démontré par des

*Voir la discussion de la fonction de test au paragraphe 2.2.

méthodes de l'analyse fonctionnelle par Kelly, Reed et Root, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) \geq \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\rho) \text{ si } \tau > \rho \ .$$

Donc les singularités du genre II ne sont possibles que si $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(0^+)$ converge mais $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$, $\tau < \infty$ diverge. On écrit

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^{\tau} dt \left[\int_0^{\tau} h(t,u)s(u)du \right]^2$$

$$= \int_0^{\tau} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} H(\omega)S(\omega) \right]^2 \ . \qquad (12)$$

Si le spectre du bruit est rationnel et l'exposant du dénominateur dépasse celui du numérateur par 2k, h(t,u) comporte une convolution et k-1 dérivations. Il suffit que s(t) et ses premières k-1 dérivées existent et soient continus pour tout t, $0 \leq t \leq \tau$ pour que (12) converge.

En général, h(t,u) comporte des intégrations, des dérivations (mais seulement un nombre fini de dérivations, parce que le bruit serait singulier s'il possédait des dérivées de tous les ordres) et des délais dans le temps. La condition générale pour que la détection soit regulière est que h(t,u)s(u) soit fin (à l'exception des δ-fonctions, qui possèdent des intégrales finies) pour tout t, $u \leq \tau$.

6.3 Étude des Singularités du Genre III

$$\lim_{\tau \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^{\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ e^{i\omega t} H(\omega)S(\omega) \right]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, |H(\omega)|^2 |S(\omega)|^2 \quad \text{Par le théorème de Parseval}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{|S(\omega)|^2}{G(\omega)} \quad . \tag{13}$$

C'est le résultat de Kelly, Reed et Root. Si la détection est régulière pour tout τ fini, ce qui entraîne que le signal et les dérivées exigées sont bornés pour tout $\tau < \infty$, la somme ne peut diverger que si $s(t)$ ne fait pas partie de $L_2(0,\infty)$.

Donc les singularités du genre III n'ont lieu que si le signal ne disparaît pas suffisamment rapidement lorsque $\tau \to \infty$.

Chapitre 7

UN EXEMPLE DE LA DÉTECTION SÉQUENTIELLE PERMANENTE

Considérons d'abord la répartition de la durée du test du rapport de vraisemblance général, et précisons ensuite au cas d'une cosinusoïde à haute fréquence dans du bruit blanc. Le développement suit de très près celui de Darling et Siegert[34].

On a montré au paragraphe 3.4 que $Z(\tau)$, le logarithme du rapport de vraisemblance, est un processus de Markoff donné par

$$Z(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} - \frac{s_i^2(\tau)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\tau)x_i(\tau) \ . \qquad (1)$$

En écrivant $S(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$, on a montré au même endroit que

$$E\, Z(\tau) = \pm \frac{S(\tau)}{2}$$

$$\text{Var}\, Z(\tau) = S(\tau)$$

$$E[Z'(\tau)Z'(\rho)] = S(\tau), \quad \tau \leq \rho \tag{2}$$

La densité de la probabilité de transition de $Z(\tau)$ de l'époque t à l'époque r (c.-à-d. la dérivée de la probabilité que $Z(r) < y$, étant donné que $Z(t) = x$) est

$$p(y;r,x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(S(r)-S(t))}} \exp\left\{ - \frac{\left[y-x \pm \frac{S(r)-S(t)}{2}\right]^2}{2[S(r)-S(t)]} \right\}; \tag{3}$$

la polarité dans l'exposant dépendant de la présence de signal.

Soit $T_c(x,t)$ l'époque de premier passage de $Z(\tau)$ au delà de c, étant donné que $Z(t) = x$, c-à-d:

$$T_c = \sup_{\tau \geq t} \left\{ \tau \,|\, c > Z(\tau),\ Z(t) = x \right\} \text{ si } c > x. \quad \text{(Si } c < x, \text{ l'inégalité se renverse.)}$$

Soit $F_c(\rho;x,t)$ la fonction de répartition de T_c, et $f_c(\rho;x,t)$ la densité correspondante. En énumérant les trajectoires possibles $Z(\tau)$, on peut écrire

$$p(y;r,x,t) = \int_t^r f_c(s;x,t)\, p(y;r,c,s)ds, \quad x > c > y \text{ ou } y > c > x. \tag{4}$$

En présence de signal, l'équation (4) devient:

$$\sqrt{\frac{1}{S(r)-S(t)}} \exp\left\{ - \frac{\left[y-x - \frac{S(r)-S(t)}{2}\right]^2}{2[S(r) - S(t)]} \right\}$$

$$= \int_t^r \frac{f_c(s;x,t)ds}{\sqrt{S(r)-S(t)}} \exp\left\{ - \frac{\left[y-c - \frac{S(r)-S(s)}{2}\right]^2}{2[S(r) - S(s)]} \right\} \tag{5}$$

Nous avons démontré au chapitre 6 que S(s) est une fonction non-décroissante de s. Donc on peut faire les remplacements uniques:

$$S(s) = w$$

$$S(r) = u$$

$$S(t) = v$$

$$q \equiv u-v$$

$$ds\, f_c(s;x,v) = dw\, g_c(w;x,v) = dw\, g_c\,(w-v;x)^*$$

et l'équation (5) mène à

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \exp\left\{ - \frac{(y-x-\frac{q}{2})^2}{2\,q} \right\} = \int_o^q dw\, \frac{g_c(w;x)}{\sqrt{q-w}} \exp\left\{ - \frac{(y-c-\frac{q-w}{2})^2}{2(q-w)} \right\}. \qquad (6)$$

Les probabilités de transition étant écrites sous la forme de fonctions stationnaires du paramètre temporal $q = S(r) - S(t)$, on peut résoudre l'équation (6) au moyen de la transformation de Laplace.

---

*g_c est fonction de la différence de ses deux arguments temporaux car les fonctions connues de l'équation (6) possèdent la même propriété.

On trouve que*

$$g_c(q;x) = \frac{|x-c|}{\sqrt{2\pi}\, q^{3/2}} \exp\left[- \frac{\left(c-x-\frac{q}{2}\right)^2}{2q} \right] . \qquad (7)$$

La densité de probabilité de T_c se trouve en faisant les remplacements inverses précédant l'équation (6):

$$f_c(r;x,t) = \frac{dS(r)}{dr}\, g_c(u-v;x)$$

$$= g_c\,(S(r)-S(t);x)\, \frac{d}{dr}\, S(r)$$

$$= \frac{|c-x|\, S'(r)}{\sqrt{2\pi}\, (S(r)-S(t))^{3/2}} \exp\left\{ - \frac{\left(c-x-\frac{S(r)-S(t)}{2}\right)^2}{2\left[S(r)-S(t)\right]} \right\} . \qquad (8)$$

Pour l'analyse séquentielle on s'intéresse à l'époque où $Z(\tau)$ dépasse un des deux seuils $a = \log A$ ou $b = \log B$ pour la première fois. Pour $a > x > b$, définissons

$$T_{ab}(x,t) = \sup_{\tau \geq t} \left\{ \tau \,|\, a > Z(\tau) > b, \quad Z(t) = x \right\} ,$$

avec fonction de répartition $F_{ab}(\rho;x,t)$ et densité $f_{ab}(\rho;x,t)$. Définissons aussi

---

*Voir [35], 4.5.27 et 5.6.1 .

$$F^{+}_{ab}(\rho;x,t) = \text{Prob}\left\{T_{ab}(x,t) < \rho,\ Z(T_{ab}) = a\right\},$$

la probabilité que $Z(\tau)$ traverse a avant b, et que le premier passage ait lieu avant l'époque ρ. On définit $F^{-}_{ab}(\rho;x,t)$ de même; les densités correspondantes sont $f^{+}_{ab}(\rho;x,t)$ et $f^{-}_{ab}(\rho;x,t)$. Évidemment,

$$F_{ab} = F^{+}_{ab} + F^{-}_{ab}.$$

Trouvons maintenant f^{+}_{ab} et f^{-}_{ab} en termes des fonctions f_a et f_b. Par une énumération directe,

$$f_a(r;x,t) = f^{+}_{ab}(r;x,t) + \int_t^r ds\ f^{-}_{ab}(s;x,t)\ f_a(r;b,s)$$

$$f_b(r;x,t) = f^{-}_{ab}(r;x,t) + \int_t^r ds\ f^{+}_{ab}(s;x,t)\ f_b(r;a,s). \qquad (9)$$

Ce sont deux équations à deux inconnues f^{+}_{ab} et f^{-}_{ab}.

On pose

$$w = S(s)$$

$$u = S(r)$$

$$v = S(t)$$

$$q = u - v = S(r) - S(t)$$

$$dw\ g(w-v;x) = ds\ f(s;x,t),$$

et on a

$$\hat{g}^{+}_{ab}(\lambda;0) = e^{\frac{a}{2}} \frac{\sinh\left[b\sqrt{2(\lambda + \frac{1}{8})}\right]}{\sinh\left[(b-a)\sqrt{2(\lambda + \frac{1}{8})}\right]}$$

$$\hat{g}^{-}_{ab}(\lambda;0) = e^{\frac{b}{2}} \frac{\sinh\left[a\sqrt{2(\lambda + \frac{1}{8})}\right]}{\sinh\left[(a-b)\sqrt{2(\lambda + \frac{1}{8})}\right]} \quad . \tag{10}$$

Les inverses de ces transformées sont*

$$g^{+}_{ab}(q,0) = \frac{e^{\frac{1}{2}\left(a - \frac{q}{4}\right)}}{q^{3/2}\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a-2n(a-b)) \exp\left[-\frac{2}{q}\left(\frac{a}{2} - n(a-b)\right)^2\right]$$

$$g^{-}_{ab}(q,0) = \frac{e^{\frac{1}{2}\left(b - \frac{q}{4}\right)}}{q^{3/2}\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n(b-a) - b) \exp\left[-\frac{2}{q}\left(\frac{b}{2} - n(b-a)\right)^2\right]$$

$$g_{ab}(q,0) = g^{+}_{ab}(q,0) + g^{-}_{ab}(q,0). \tag{11}$$

On obtient $f^{+}_{ab}(r,o)$, $f^{-}_{ab}(r,o)$, et $f_{ab}(r,o)$ en remplaçant q par S(r) dans les équations (11) et puis en multipliant par $\frac{d}{dr}$ S(r).

---

*Voir [35], l'éq. 5.9.31.

Les calculs ci-dessus ont été effectués pour la fonction de répartition de $Z(\tau)$ correspondant à la présence de signal. En absence de signal,

$$p(y;r,x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\,(S(r)-S(t))}}\ \exp\left\{-\frac{y-x+\frac{S(r)-S(t)}{2}^{2}}{2[S(r)-S(t)]}\right\}. \qquad (12)$$

et les analogues aux équations (16) sont

$$\hat{g}^{+}_{ab}(\lambda,0) = e^{-\frac{a}{2}}\,\frac{\sinh\left[b\sqrt{2(\lambda+\frac{1}{8})}\right]}{\sinh\left[(b-a)\sqrt{2(\lambda+\frac{1}{8})}\right]}$$

$$\hat{g}^{-}_{ab}(\lambda,0) = e^{-\frac{b}{2}}\,\frac{\sinh\left[a\sqrt{2(\lambda+\frac{1}{8})}\right]}{\sinh\left[(a-b)\sqrt{2(\lambda+\frac{1}{8})}\right]}\ . \qquad (13)$$

En premier exemple considérons la détection d'un signal constant s dans du bruit blanc à densité spectrale unitaire. Dans ce cas, $S(\tau) = 2s^{2}\tau$, et $\frac{d}{d\tau}S(\tau) = 2s^{2}$.

$$E\,T_{ab} = \int_{o}^{\infty} t\, f_{ab}(t)dt = \int_{o}^{\infty} t\, g_{ab}(S(t))dS(t)$$

$$= \int_0^\infty \frac{v}{2s^2}\, g(v)dv$$

$$= -\frac{1}{2s^2} \lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{d\lambda}\, \hat{g}(\lambda).^{*} \qquad (14)$$

En absence de signal, on trouve

$$E\, T_{ab} = -\lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{d\lambda}\, \hat{f}(\lambda, 0)$$

$$= -\frac{1}{s^2}\left[a\,\frac{1 - e^b}{e^a - e^b} + b\,\frac{e^a - 1}{e^a - e^b}\right] . \qquad (15)$$

En résolvant les deux équations suivantes

$$\frac{1-\beta}{\alpha} = A = e^a$$

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = B = e^b$$

pour α et $1-\alpha$, on a

$$\alpha = \frac{1 - e^b}{e^a - e^b}$$

$$1-\alpha = \frac{e^a - 1}{e^a - e^b} \quad , \qquad (16)$$

---

*La conclusion est valable puisque $L[tf(t)] = -\frac{d}{d\lambda}\, \hat{f}(\lambda)$, et $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{\lambda \to 0} \hat{f}(\lambda)$ si cette limite existe: voir [36], chapitre 10, §1.

et par conséquent l'équation (15) mène à

$$E\,T_{ab} = -\frac{1}{s^2}\,[\alpha a + (1-\alpha)b], \tag{17a}$$

la solution attendue (voir Wald [13], l'équation 3.55).

Par analogie, en présence de signal on trouve

$$E\,T_{ab} = +\frac{1}{s^2}\,[(1-\beta)a + \beta b]\,. \tag{17b}$$

Un exemple d'un plus grand intérêt est la détection d'une onde cosinusoïdale, $s(t) = A\cos\omega t$, dans du bruit blanc. Afin de produire un modèle convenable de bruit blanc, on commence par supposer un processus de Markoff, puis on étudie les résultats lorsque le spectre s'élargit.

La covariance d'un processus de Markoff est $\psi(t-s) = \sigma^2 e^{-\gamma|t-s|}$. Le spectre est rationnel, et $S(t)$ peut se trouver par moyen de la fonction de test $y(u,t)$ du paragraphe 2.2:

$$S(t) = \int_o^t du\; s(u)y(u,t). \tag{18}$$

Au cas d'un processus de Markoff, $y(u,t)$ est[22]

$$y(u,t) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\gamma\left[s(u) - \frac{s''(u)}{\gamma^2}\right] + \left[s(o) - \frac{1}{\gamma}\,s'(o)\right]\delta(u) + \left[s(t) + \frac{1}{\gamma}\,s'(t)\right]\delta(t-u)\right). \tag{19}$$

On obtient le modèle de bruit blanc à densité spectrale N_o si $\gamma \to \infty$, $\sigma^2 \to \infty$, tel que $\frac{4\sigma^2}{\gamma} = N_o$. On obtient de l'équation (19)

$$S(t) = \frac{2}{N_o} \int_o^t du\, s^2(u). \tag{20}$$

Considérons le signal $s(t) = A \cos \omega t$. Puis, on a

$$\frac{S(t)}{2} = + \frac{A^2}{2N_o} \left(t + \frac{\sin 2\,\omega t}{2\,\omega} \right) . \tag{21}$$

*

L'évaluation de $E\, T_{ab} = \int_o^\infty t f(t) dt$ est souhaitable dans ce cas, en particulier pour $\omega >> 1$. Cette quantité est difficile à calculer directement, mais une solution approximative est faisable.

En écrivant $R = \frac{A^2}{N_o}$, l'équation (21) est

$$v = S(t) = R\left(t + \frac{\sin 2\,\omega t}{2\,\omega} \right),$$

d'où on obtient la solution approximative

$$t \cong \frac{1}{R} \left(v - \frac{\sin 2\omega v}{2\,\omega} \right) . \tag{22}$$

On développera une expression de $\hat{f}(\lambda)$ en fonction de $\hat{g}(\lambda)$ donnée par les équations (10) et (13) ci-dessus. On exige l'exactitude

---

*Si $\omega t >> 1$, cette quantité est à peu près $\frac{A^2 t}{2N_o}$, l'énergie du signal divisée par la densité spectrale du bruit. Plusieurs auteurs ont établi ce résultat asymptotique au moyen de l'échantillonage de Shannon. Voir [10], par exemple.

de cette expression seulement pour λ petit, puisque l'on finira par utiliser l'identité

$$E\,T_{ab} = \lim_{\lambda \to o} \left(- \frac{d}{d\lambda}\, \hat{f}_{ab}(\lambda) \right) .$$

De l'équation (22) et l'identité $f(t)\,dt = g(v)\,dv$,

$$\hat{f}(\lambda) \equiv \int_o^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$$

$$\cong \int_o^\infty e^{-\frac{\lambda v}{R}}\, g(v) dv\; e^{\frac{\lambda}{R}} \left(\frac{\sin 2\omega v}{2\omega} \right) . \qquad (23)$$

En développant le membre droit,

$$\lim_{\lambda \to o} - \frac{d}{d\lambda}\, \hat{f}(\lambda) = \lim_{\lambda \to o} \left(- \frac{d}{d\lambda}\, \hat{g}\left(\frac{\lambda}{R}\right) + \frac{1}{4\omega i R} \left(\hat{g}\left[\frac{\lambda + 2\omega i}{R}\right] - \hat{g}\left[\frac{\lambda - 2\omega i}{R}\right] \right) \right) . \qquad (24)$$

En absence de signal (l'éq. 16)

$$\lim_{\lambda \to o} - \frac{d}{d\lambda}\, \hat{g}\left(\frac{\lambda}{R}\right) = - \frac{2}{R} \left[\alpha a + (1-\alpha) b \right] ,$$

tandis qu'en présence de signal

$$\lim_{\lambda \to o} - \frac{d}{d\lambda}\, \hat{g}\left(\frac{\lambda}{R}\right) = \frac{2}{R} \left[(1-\beta) a + \beta b \right] .$$

Il ne reste que

$$\lim_{\lambda \to o} \frac{1}{4\omega i R} \left(\hat{g}\left[\frac{(\lambda + 2\omega i)}{R}\right] - \hat{g}\left[\frac{\lambda - 2\omega i}{R}\right] \right)$$

à calculer.

En absence de signal et en supposant que $2\omega \gg \frac{1}{4}$, on trouve que ce dernier terme est égal à

$$\frac{1}{2\omega R}\left(e^{-\frac{a}{2}} \frac{\sinh(2b-a)\sqrt{\omega}\sin a\sqrt{\omega} - \sinh a\sqrt{\omega}\sin(2b-a)\sqrt{\omega}}{\cosh 2(b-a)\sqrt{\omega} - \cos 2(b-a)\sqrt{\omega}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{b}{2}} \frac{\sinh(2a-b)\sqrt{\omega}\sin b\sqrt{\omega} - \sinh b\sqrt{\omega}\sin(2a-b)\sqrt{\omega}}{\cosh 2(b-a)\sqrt{\omega} - \cos 2(b-a)\sqrt{\omega}} \right).$$

Pour ω assez grand, ceci mène au résultat asymptotique

$$\frac{1}{2\omega R}\left(\left[-e^{-a\sqrt{\omega}}\sin a\sqrt{\omega} + \sin(a-2b)\, e^{-(a-2b)\sqrt{\omega}} \right] e^{-\frac{a}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left[e^{b\sqrt{\omega}}\sin b\sqrt{\omega} + e^{-(2a-b)\sqrt{\omega}}\sin(2a-b)\sqrt{\omega} \right] e^{-\frac{b}{2}} \right),$$

ce qui décroît rapidement lorsque ω s'accroît. Donc, si ω est suffisamment grand (c-à-d. $e^{a\sqrt{\omega}} \gg e^{-a\sqrt{\omega}}$; $e^{(a-2b)\sqrt{\omega}} \gg e^{-(a-2b)\sqrt{\omega}}$; $\omega \gg \frac{1}{8}$), on voit que la composante de la durée espérée de test due à l'oscillation est très petite par rapport à la composante due à la puissance de signal. En présence de signal, on n'a qu'à remplacer "exp $-\frac{a}{2}$" et "exp $-\frac{b}{2}$" par "exp $\frac{a}{2}$" et "exp $\frac{b}{2}$" respectivement.

Chapitre 8

CONCLUSIONS, AVEC DES QUESTIONS ADDITIONNELLES

8.1 Le Développement Karhunen-Loève

Ce développement est très commode aux questions théoriques, mais il n'est pas bien adapté aux applications pratiques. Ceci est dû à diverses raisons:

1. Généralement on ne peut pas résoudre l'équation définissant les fonctions propres, bien qu'il existe une méthode si le spectre du processus est rationnel.(5)

2. Les fonctions propres peuvent ne pas être trigonométriques. Pourtant, dans le cas rationnel les fonctions propres satisfont à une équation différentielle à coefficients constants, donc ce sont des fonctions exponentielles. Une question intéressante à étudier est la suivante: dans le cas rationnel, les fonctions propres sont-elles trigonométriques? Si la réponse est affirmative, les fréquences ne peuvent pas être en rapport harmonique, puisqu'il est bien connu qu'aucun processus apériodique aléatoire ne peut se développer en série de Fourier à coefficients indépendants sur un intervalle fini.(38)

3. La représentation n'est pas très utile pour les problèmes concernant des filtres linéaires. Bien que les fonctions propres soient trigonométriques dans le cas rationnel, le développement ne converge vers le processus que dans l'intervalle de définition.

Considérons le problème suivant: étant donné un filtre linéaire à fonction de fréquence $H(\nu)e^{i\phi(\nu)}$ et le bruit $n(t)$ représentable sur l'intervalle $(0,T)$ par la série $n(t)= \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=1}^{k} \sqrt{\lambda_j}\, n_j e^{i\nu_j t+\theta_j}$. Si le filtre

transforme le bruit, quel est le développement K-L du rendement? Malheureusement, ce n'est pas $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\lambda_j}n_j\,H(\nu_j)e^{i(\nu_j t+\phi(\nu_j)+\theta_j)}$, même sur l'intervalle (0,T). Ce n'est pas difficile à voir: le filtre a mémoire, donc le rendement à l'époque $t \in (0,T)$ dépend de $n(u)$ à des époques $u < 0$. Le développement K-L ne converge pas à $n(u)$, $u < 0$; donc on ne peut pas obtenir le développement K-L du rendement simplement en prenant la transformation par le filtre du développement K-L de $n(u)$, bien que les fonctions propres soient trigonométriques.

D'autre part, le développement K-L peut être utile en obtenant le filtre linéaire optimum dans le cas où il n'y a qu'un segment fini du passé du processus disponible.(33,39) C'est en essence le procédé d'estimation exposé dans ses lignes générales au chapitre 5, équation 5.17. Les avantages analytiques, décrits au chapitre 3, sont sensibles. Au présent, cette répresentation est le seul instrument qui permet le développement rigoureux du rapport de vraisemblance dans le cas permanent.

Enfin, la représentation K-L est très utile à la considération des transformations par des dispositifs non-linéaires sans mémoire, surtout par des appareils à caractéristique polynôme (détecteur quadratique, par exemple).

4. Au moins dans le cas rationnel, on savait exprimer le logarithme du rapport de vraisemblance sous la forme:

$$Z(\tau) = \int_0^\tau f(t)\left[x(t) - \frac{s(t)}{2}\right]dt + \sum_{j=0}^{k} a_j s^{(j)}(0)\left[x^{(j)}(0) - \frac{s^{(j)}(0)}{2}\right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} b_j s^{(j)}(\tau)\left[x^{(j)}(\tau) - \frac{s^{(j)}(\tau)}{2}\right]. \qquad (1)$$

Le développement K-L n'était qu'un instrument intermédiaire pour obtenir cette expression et pour trouver analytiquement la loi de répartition. Pourtant le recepteur ne doit pas faire un calcul explicite des coefficients $x_i(\tau)$. Le recepteur ne doit calculer que les termes

$$a_j x^{(j)}(o)s^{(j)}(o),\ b_j s^{(j)}(\tau)s^{(j)}(\tau), \text{et} \int_o^\tau f(t)x(t)dt \ \ldots$$

a_j et b_j ne dépendent pas de τ, et $f(t)$ est une simple combinaison linéaire d'un nombre de dérivées de $s(t)$. Donc les opérations détruisant de l'information dans le recepteur sont vraiment élémentaires, et comportent des corrélations. Tout ceci suggère que l'introduction du développement K-L sert uniquement à obtenir $L[x(t,\tau)]$ analytiquement, peut-être y a-t-il une autre méthode analytique de l'obtenir (en particulier, si le bruit est blanc, (1) devient $Z(\tau) = \int_o^\tau s(t)x(t)dt$, le résultat obtenu par Woodward[9] par moyen de l'échantillonage de Shannon).

Une question importante est la résolution de l'équation

$$s(t) = \int_o^\tau F(u,\tau)\psi(t-u)du, \qquad (2)$$

pour la fonction de test, si la transformée de Fourier de $\psi(t-u)$ n'est pas rationnelle. Quand il s'agit de cas de ce genre, le rapport de vraisemblance peut être très difficile à composer, puisque ni $F(u,\tau)$ ni les fonctions propres ne sont généralement connues. En pratique, la fonction généralisée $F(u,\tau)$ convient mieux que les fonctions propres mêmes. Considérons les opérations qui seraient nécessaires avec les fonctions propres:

i. Il faudrait faire le calcul de $\phi_i(t,\tau)$ et $\lambda_i(\tau)$ pour toute τ

et plusieurs valeurs de i. (Naturellement, les résultats de ce calcul pourraient s'enrégistrer d'avance.)

ii. Puis il faudrait faire le calcul des coefficients

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\, s(t)\phi_i(t)dt \ .$$

iii. Enfin, il faudrait faire le calcul de

$$Z(\tau) = \sum_{i=1}^{N}\left[s_i(\tau)x_i(\tau) - \frac{s_i^2(\tau)}{2}\right] \ . \qquad (3)$$

$\sum_{i=1}^{N} s_i^2(\tau)$ et $s_i(\tau)$ auraient déjà été calculés (pour chacune de plusieurs valeurs des paramètres s'il s'agissait d'une estimation). On ne saurait effectuer une telle opération qu'un nombre fini de fois. Une perte est encourue si on se borne à un nombre fini de valeurs de τ. En outre, ou bien il faut faire de nombreuses corrélations simultanées ou bien il faut enrégistrer $x(t)$, puisque $\phi_i(t,\tau)$ dépend de τ. On a

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau x(t)\phi_i(t,\tau)dt$$

$$= \int_\rho^\tau x(t)\phi_i(t,\tau)dt + \int_0^\rho x(t)\phi_i(t,\tau)dt$$

$$\neq \int_\rho^\tau x(t)\phi_i(t,\tau)dt + \int_0^\rho x(t)\phi_i(t,\rho)dt$$

$$= \int_\rho^\tau x(t)\phi_i(t,\tau)dt + x_i(\rho), \quad \rho < \tau \ .$$

Donc il faut recalculer $x_i(\tau + \Delta\tau)$ lorsque τ augmente, en utilisant le passé entier de $x(t)$ et non seulement l'accroissement de $x(t)$, $\tau \le t \le \tau + \Delta\tau$.

Du point de vue du plan du recepteur, surtout dans le cas séquentiel mais même au cas à intervalle prescrit, c'est une nécessité pratique de savoir composer $Z(\tau)$ par moyen des opérations figurant dans l'équation (1).

* * * *

Pitcher et Root ont démontré[38] qu'un processus stochastique ne peut se représenter dans l'intervalle (0,T) au moyen d'une série harmonique de Fourier à coefficients indépendents que si la covariance est périodique (à période T).

Un processus de Markoff peut se représenter sur l'intervalle (0,T) sous la forme

$$n(t) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{N} n_i \sqrt{\lambda_i} \cos(\omega_i t + \phi_i),$$

les n_i étant sans corrélation et les fréquences ω_i n'étant pas liées harmoniquement.[5] (On a deviné au paragraphe 2 ci-dessus qu'une telle représentation est valable pour tout processus à spectre rationnel.) Considérer maintenant le processus defini pour tout t par la série

$$m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, n_i \cos(\omega_i t + \phi_i).$$

La covariance de m(t) est

$$E\, m(t)m(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i u + \phi_i)$$

une fonction presque-périodique en t et en u. n(t) est le seul processus stationnaire possédant ce developpement sur (0,T), mais il existe un processus presque-périodique m(t) égal en moyenne à n(t) sur cet intervalle.

Il serait peut-être intéressant d'étudier la théorie des fonctions aléatoires presque-périodiques. En tout cas, visiblement le théorème de Pitcher et Root n'est plus valable si l'on remplace le mot 'périodique' par 'presque-périodique.'

8.2 La Fonction de Test et les Représentations de la Somme $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$

Un artifice intéressant et très utile est la représentation de $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$ par une intégrale définie.

En termes de la fonction généralisée $F(t,\tau)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^{\tau} dt\, s(t) F(t,\tau), \tag{1}$$

tandis qu'en termes du filtre blanchissant $H(\omega)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau) = \int_0^{\tau} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} H(\omega) S(\omega) \right]^2 . \tag{2}$$

$\frac{1}{|H(\omega)|^2} = N(\omega)$, le spectre du bruit, et donc d'habitude il n'est pas très difficile de synthétiser un $H(\omega)$ convenable (par exemple, un filtre à phase minimum avec gain $\left[N(\omega)\right]^{-\frac{1}{2}}$). L'équation (2) peut servir pour résoudre (1) pour la fonction de test $F(t,\tau)$. Comme discuté au sous-chapitre 8.1, en pratique il faut connaître $F(t,\tau)$ pour composer le rapport de vraisemblance dans le recepteur.

Une quantité d'intérêt général est la probabilité de fausse alerte de l'estimateur à vraisemblance maximum. C'est la probabilité que $\max_{\pi} Z(\tau,\pi)$ dépasse le seuil (supérieur) en absence de signal. On n'a pas considéré cette question dans la thèse, sauf d'une façon oblique à l'exemple 7.1.

Mais il faut considérer la fonction de répartition de

$$\max_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} x_i s_i(\pi) = \max_{\pi} \int_0^{\tau} dt\ x(t)\ F(t,\tau,\pi)$$

$$= \max_{\pi} \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} S(\omega,\pi) H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi}\, e^{-i\nu t} X(\nu) H(\nu) \quad (3)$$

au moyen de la première intégrale si $F(t,\tau,\pi)$ est connu; sinon, au moyen de la deuxième intégrale. Remarquons que dans le cas rationnel $F(t,\tau,\pi)$ s'exprime sous la forme

$$F(t,\tau,\pi) = \sum_{j=1}^{n} s^{(j)}(t,\pi) + \sum_{k=1}^{m} a_k s^{(k)}(o,\pi)\delta^{(k)}(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k s^{(k)}(\tau,\pi)\delta^{(k)}(\tau-t),$$

où les valeurs a_k, b_k, n, et m dépendent du spectre du bruit mais non pas du signal ou du paramètre. Donc, étant donnée une densité spectrale (ou une covariance), la forme de $F(t,\tau,\pi)$ se trouve indépendemment de π. Le choix de π n'influe que sur les dérivées de $s(t,\pi)$, et le calcul de la somme de (3) peut être fait au moyen d'une des représentations intégrales.

8.3 L'Existence d'un Test Optimum

La discussion de la transformation blanchissante des données reçues est directe et n'exige pas de discussion supplémentaire. Pourtant, on pourrait signaler la simplicité relative du filtre blanchissant. Le détecteur à vraisemblance maximum consiste en un filtre et un corrélateur.

Il n'y a pas d'analogue permanent de ce filtre discret. Mais le chapitre 4 terminé, j'ai découvert une note de Beutler[40] dans laquelle il discute l'analogue discret de notre filtre blanchissant

pour les processus permanents. Ses conclusions sont semblables aux nôtres: Un tel filtre existe si le processus est complètement régulier (c-à-d. s'il remplit la condition de Paley-Wiener) et si le gain carré est égal à la réciproque du spectre du processus. Zetterberg[41] a fait un travail parallèle sur le filtre blanchissant au cas permanent. Il obtient aussi nos équations 6.9 et 6.12.

8.4 Continuité du Rapport de Vraisemblance et du Maximum du Rapport de Vraisemblance - Cas d'un Spectre Rationnel

La continuité peut s'exprimer à peu près comme la propriété d'une fonction qui subit une variation minime lorsque son argument change légèrement. Si l'on se propose d'approximer par des moyens digitaux les opérations exigées par le test séquentiel, il faut que le rapport de vraisemblance soit continu (en effet, il faut encore un peu:que le rapport soit uniformément continu). Pour un bruit du genre le plus simple - un bruit blanc - le détecteur ne doit qu'établir la corrélation entre le signal attendu et la courbe reçue.

L'opération générale, pour des signaux connus exactement, consiste à établir la corrélation entre les dérivées de la courbe reçue et les dérivées correspondantes du signal, puis à ajouter le produit des valeurs initiales et finales de la courbe par les valeurs respectives du signal (voir l'équation 8.1.1). Ces opérations sont effectuées convenablement en temps réel, mais même ces opérations-ci sont effectuées quelques fois en temps discret, surtout si les calculs se font à un emplacement différent de celui du détecteur.

Si toutefois le signal comporte un ou plusieurs paramètres inconnus, ces paramètres doivent s'estimer de façon discrète, car il est

impossible d'effectuer un nombre infini de corrélations (correspondant à une base dénombrable dense sur le continuum des valeurs possibles des paramètres).

Donc, lorsqu'il s'agit d'un paramètre à estimer, il faut exprimer en valeurs discrètes les valeurs du paramètre, et la continuité du maximum de vraisemblance prend une grande importance. Par conséquent, le chapitre 5 sert de base à l'étude des approximateurs discrets aux estimateurs à vraisemblance maximum. Comme expliqué au premier chapitre de [12] et surtout au chapitre 7 de [9], la fonction d'ambigüité du signal détermine la manière de quantisation. Cette considération conduit au domaine intéressant du plan de signaux, mais c'est une question qui ne rentre pas dans le plan de cette étude.

8.5 Le Rapport de Vraisemblance - Cas Permanent

A la fin du chapitre 3, on arriva à la conclusion que le rapport de vraisemblance d'un signal connu dans du bruit laplacien est un processus de Markoff, conclusion qui a un grand intérêt théorique et pratique. Du point de vue théorique, elle permet le développement au chapitre 7 conduisant à la fonction de répartition des époques de terminaison du test permanent. Pour les signaux habituels des télécommunications - c'est-à-dire les signaux a haute fréquence - on savait démontrer que la durée moyenne de test dépendait du rapport des puissances de signal et bruit, et non pas des détails de l'allure du signal. On a fait le calcul sous l'hypothèse de bruit blanc. Si le bruit a corrélation, la forme du signal peut être importante, bien que les considérations énergétiques soient encore dominantes. La durée moyenne pour la détection d'un signal à haute fréquence est à peu près égale à la durée moyenne pour un signal constant à la même puissance moyenne.

Une telle supposition peut être erronée lorsqu'il s'agit d'un signal à très basse fréquence. Ici, "très basse fréquence" veut dire "à période d'oscillation au moins de l'ordre de la durée moyenne de test d'un signal constant à la même puissance dans le même processus de bruit."

Deux cas extrèmes sont à envisager:

1. Le signal attendu est nul pendant un intervalle long mais fini T, et puis il prend progressivement une valeur constante s. T étant fini, la puissance moyenne est celle d'un signal constant à s, mais la durée moyenne de test est augmentée de T secondes. On pourrait répondre que ce cas revient à une translation de l'origine et donc que l'on a commencé ses observations à une époque inexacte. C'est toutefois le cas extrême évoqué par une sinusoïde à très basse fréquence.

2. Le signal attendu est constant à la valeur (dite) 2s pendant un long intervalle T, et puis il prend progressivement la valeur s. De nouveau la puissance moyenne est celle de (i), mais ici la durée moyenne est très courte par rapport à celle du signal constant correspondant.

Dans les deux cas, "progressivement" veut dire "tel que le processus de signal possède autant de dérivées que le processus de bruit, évitant ainsi les situations singulières des chapitres 5 et 6." Afin de faire le calcul de la durée moyenne de test, il ne suffit pas d'adapter les méthodes de Wald[13] pour le test des variables aléatoires indépendantes à la même fonction de répartition; il faut utiliser un développement comme celui du chapitre 7 considérant le rapport de vraisemblance comme un processus stochastique.

Une question intéressante et potentiellement importante est la suivante: le maximum du rapport de vraisemblance (d'un signal à des para-

mètres inconnus) est-il un processus de Markoff? Deuxièmement, le rapport de vraisemblance, intégré sur l'espace des paramètres inconnus, est-il un processus de Markoff? Malheureusement toutes les deux réponses sont probablement négatives, rendant invalable le raisonnement du chapitre 7.

RÉFÉRENCES

1. Karhunen, Kari, "Ueber Lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung," Annalae Academiae Scientarium Fennicae, A. I 34, Helsinki, 1947.

2. Loève, Michel, "Fonctions Aléatoires de Second Ordre," dans P. Lévy, Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villiers, Paris, 1948.

3. Grenander, Ulf, "Stochastic Processes and Statistical Inference," Arkiv för Matematik, 1, 1950, Stockholm, p. 195.

4. Kelly, E. J., I. S. Reed, et W. L. Root, "The Detection of Radar Echoes in Noise," Parties I et II, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 8, Nos. 2 et 3, 1960.

5. Slepian, David, "Estimation of Signal Parameters in Noise," PGIT-3, 1954, pp. 68-89, IRE Professional Group on Information Theory.

6. Wald, Abraham, Statistical Decision Functions, J. Wiley & Sons, New York, 1950.

7. Van Meter, David, et D. Middleton, "Detection and Extraction of Signals in Noise from the Point of View of Statistical Decision Theory," I and II, J SIAM, Vol. 3, pp. 192-253, 1955, et Vol. 4, pp. 86-119, 1956.

8. Shannon, C. E., The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, Urbana, 1949.

9. Woodward, P. M., Probability and Information Theory, with Radar Applications, McGraw-Hill, New York, 1953.

10. Petersen, W. W., et T. G. Birdsall, "The Theory of Signal Detectability," Report No. 13, EDG, University of Michigan, Ann Arbor, 1953.

11. Bussgang, J. J., et D. Middleton, "Sequential Detection of Signals in Noise," Harvard U. Crufts Lab. Report No. 175, 31 Août, 1955.

12. Selin, Ivan, "Synchronization of Coherent Detectors," RAND Paper P-2067, 5 Août, 1960.

13. Wald, A., Sequential Analysis, J. Wiley & Sons, New York, 1947.

14. Swerling, Peter, "Parameter Estimation for Waveforms in Additive Gaussian Noise," J SIAM, Vol. 7, No. 2, pp. 152-166, 1959.

15. Barankin, E. W., "Locally Best Unbiased Estimates," Ann. Math. Stat. 20, 1949, pp. 477-501.

16. Swerling, Peter, "Paradoxes Related to the Rate of Transmission of Information," Information and Control, Vol. 3, No. 4, Décembre 1960, pp. 351-359.

17. Courant, R., et D. Hilbert, Methods of Math. Physics, Vol. I, Interscience, New York, 1953.

18. Blanc-LaPierre, A., et R. Fortet, Théorie des Fonctions Aléatoires, Masson et Cie, Paris, 1953.

19. Riesz, F., et B. Nagy, Functional Analysis, Ungar, New York, 1955.

20. Parzen, Emmanuel, "A New Approach to the Synthesis of Optimal Smoothing and Prediction Systems," a paraître dans: Proceedings of a Symposium on Optimization, Academic Press, New York.

21. Schwartz, L., Théorie des Distributions, Hermann et Cie, Paris, 1950-1951.

22. Zadeh, L. A., et J. R. Ragazzini, "An Extension of Wiener's Theory of Prediction," J. Apply. Phys., Vol. 21, pp. 645-655, Juillet, 1950.

23. Dolph, C. L., et M. A. Woodbury, "On the Relation Between Green's Functions and Covariances of Certain Stochastic Processes, and its Application to Unbiased Linear Prediction," Trans. Am. Math. Soc., Vol. 72, pp. 519-550, Mai, 1952.

24. Wiener, Norbert, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, J. Wiley & Sons, New York, 1949.

25. Wald, A., et J. Wolfowitz, "Optimum Nature of the Sequential Probability Ratio Test," Annals of Math. Stat., Vol. 19, pp. 326-339, 1948.

26. Cramér, Harald, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton, 1946.

27. Lehmann, E. L., Testing Statistical Hypotheses, J. Wiley & Sons, New York, 1959.

28. Williams, J. D., "An Approximation to the Probability Integral," Annals of Math. Stat., Vol. 17, No. 3, Septembre, 1946.

29. Knopp, Konrad, Theory and Application of Infinite Series, Version Anglaise, Blackie & Sons, London, 1928.

30. Gantmacher, F. R., Matrix Theory, Version Anglaise, Chelsea, New York, 1959.

31. Bode, H. W., et C. E. Shannon, "A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory," Proceed. of the IRE, Vol. 38, Avril, 1959, pp. 417-425.

32. Doob, J. L., Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New York, 1953.

33. Swerling, Peter, "Optimum Linear Estimation for Random Processes as the Limits of Estimates based on Sampled Data," IRE Wescon Convention Record, Session on Information Theory, 1958.

34. Darling, D. A., et A. J. F. Siegert, "The First Passage Problem for a Continuous Markov Process," Ann. Math. Stat., Vol. 24, No. 4, Décembre, 1953, pp. 624-639.

35. Bateman Manuscript Project, Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1954.

36. Doetsch, Gustav, Theorie und Anwendung Der Laplace-Transformation, Dover, New York, 1943.

37. Gardner, M. F., et J. L. Barnes, Transients in Linear Systems, Vol. I, J. Wiley & Sons, New York, 1942.

38. Pitcher, T., et W. L. Root, "On the Fourier Series Expansion of Random Functions," Ann. Math. Stat., Vol. 26 (2), pp. 313, Juin, 1955.

39. Davis, R. C., "On the Theory of Prediction of Nonstationary Stochastic Processes," J. App. Phys. 23, pp. 1047-1053, Septembre, 1952.

40. Beutler, F. J., "A Comment on the Optimum Nonlinear Filtering of Balakrishman and Drenick," Correspondence Section, IRE Trans. on Infor. Theory, Vol. IT-4, pp. 88-89, Juin, 1958.

41. Zetterberg, L. H., "Data Transmission Over a Noisy Gaussian Channel," Trans. Roy. Inst. Techn. No. 184, Stockholm, 1961.

42. Watson, G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre

1. INTRODUCTION 1
   - 1.1. Résumé Bibliographique 1
   - 1.2. Base Mathématique 2

2. DIVERS RÉSULTATS MATHÉMATIQUES 7
   - 2.1. Continuité des Fonctions et Valeurs Propres 7
   - 2.2. La Fonction de Test 11
   - 2.3. La Symétrie des Fonctions Propres 17

3. L'ESTIMATION ET LA DÉTECTION 19
   - 3.1. Le Problème de Détection 19
   - 3.2. Cas Discret 20
   - 3.3. Cas Permanent 26
   - 3.4. Preuve que le Logarithme du Rapport de Vraisemblance est un Processus de Markoff 30

4. LE TEST SÉQUENTIEL OPTIMUM POUR LA PRÉSENCE D'UN SIGNAL DANS DU BRUIT LAPLACIEN 33
   - 4.1. Des Signaux Généraux dans du Bruit Indépendant - Cas Discret 33
   - 4.2. Signal dans du Bruit Dépendant 38
   - 4.3. Cas Permanent, Bruit Blanc 40
   - 4.4. Cas Permanent, Bruit "Coloré" 44

5. CONTINUITÉ DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE SI LE SPECTRE EST RATIONNEL 49

6. SINGULARITÉ DE DÉTECTION 55
   - 6.1. Étude des Singularités du Genre I 60
   - 6.2. Étude des Singularités du Genre II 60
   - 6.3. Étude des Singularités du Genre III 61

7. UN EXEMPLE DE LA DÉTECTION SÉQUENTIELLE PERMANENTE 63

8. CONCLUSIONS, AVEC DES QUESTIONS ADDITIONNELLES 75
   - 8.1. Le Développement Karhunen-Loève 75
   - 8.2. La Fonction de Test et les Représentations de la Somme $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(\tau)$ 80
   - 8.3. L'Existence d'un Test Optimum 81
   - 8.4. Continuité du Rapport de Vraisemblance et du Maximum du Rapport de Vraisemblance - Cas d'un Spectre Rationnel 82
   - 8.5. Le Rapport de Vraisemblance - Cas Permanent 83

RÉFÉRENCES 87